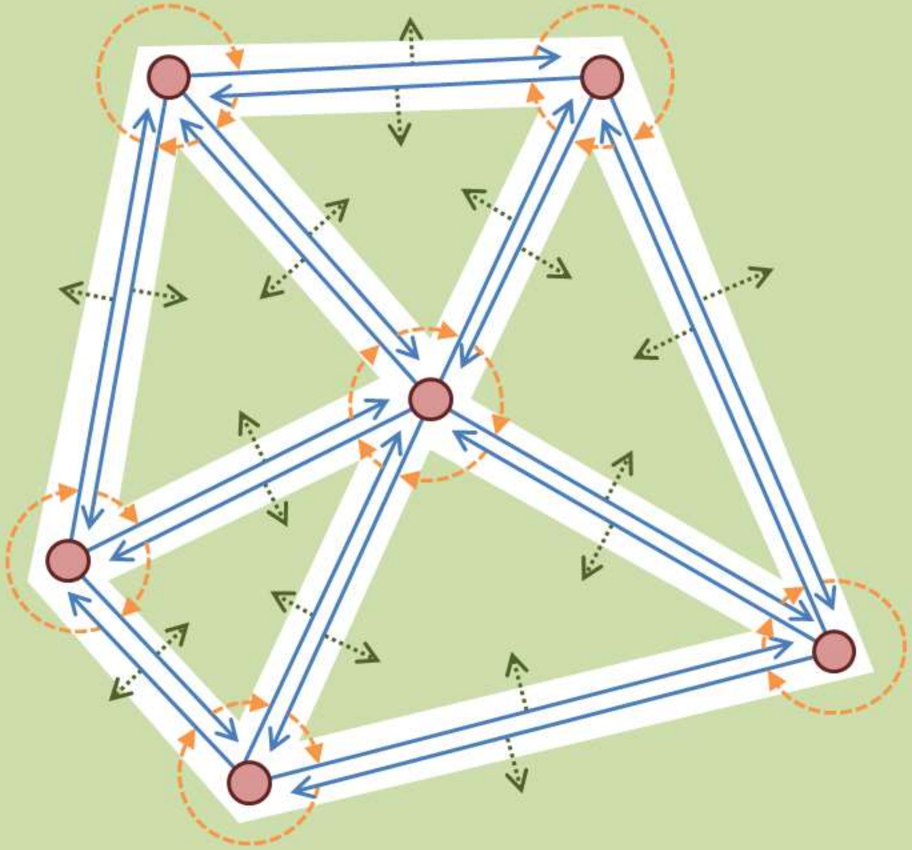


Topológiai algoritmusok
és adatszerkezetek

# TÉRINFORMATIKAI ALGORITMUSOK

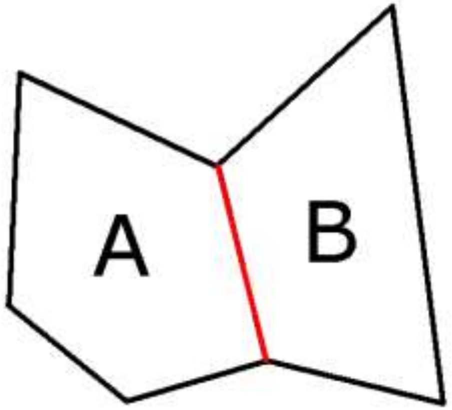
Cserép Máté
mcserep@caesar.elte.hu
2015. november 18.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM INFORMATIKAI KAR

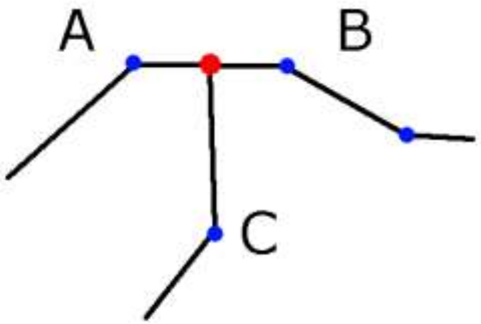
# BEVEZETŐ

**Topológia:** olyan matematikai tudomány, mely bizonyos geometriai tulajdonságokból kiindulva, azok általánosítása alapján, algebrai törvényszerűségeket határoz meg.

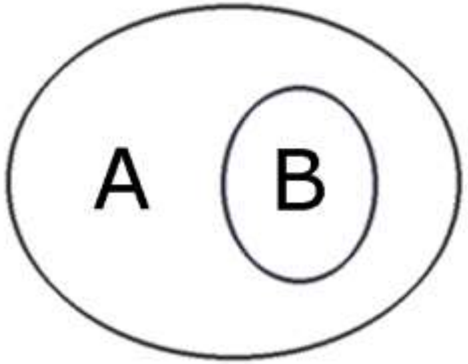
**Geometriai topológia:** a téralakzatok azon tulajdonságait vizsgálja, melyek nem változnak az idomok szakadásmentes torzítása során.




Szomszédság




Kapcsolódás / Folyamatosság




Tartalmazás

# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK

Topológiai relációk lekérdezése

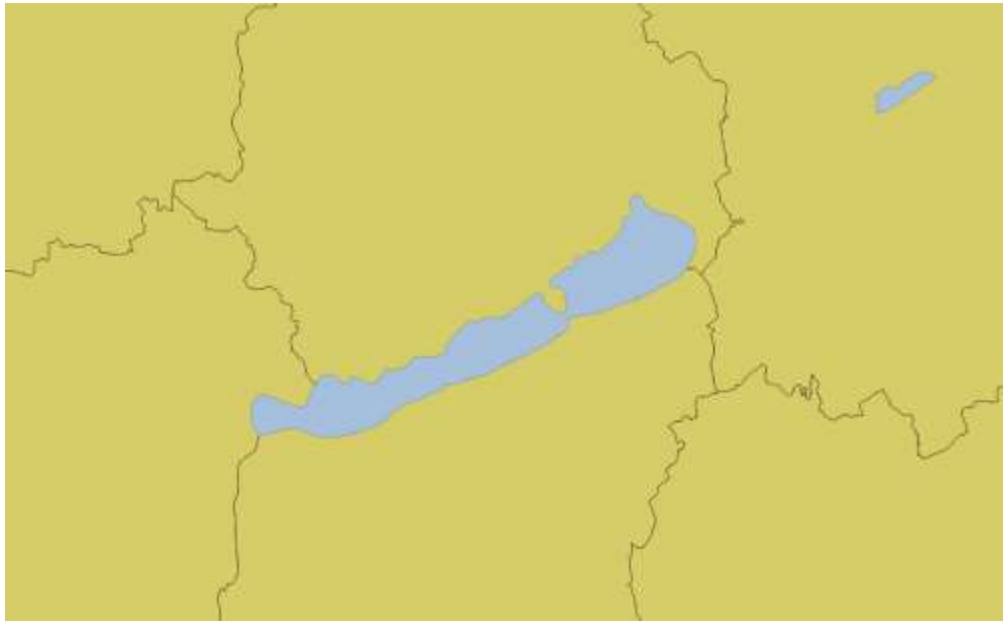
- Mely megyékkel határos Veszprém megye?

# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK

Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?

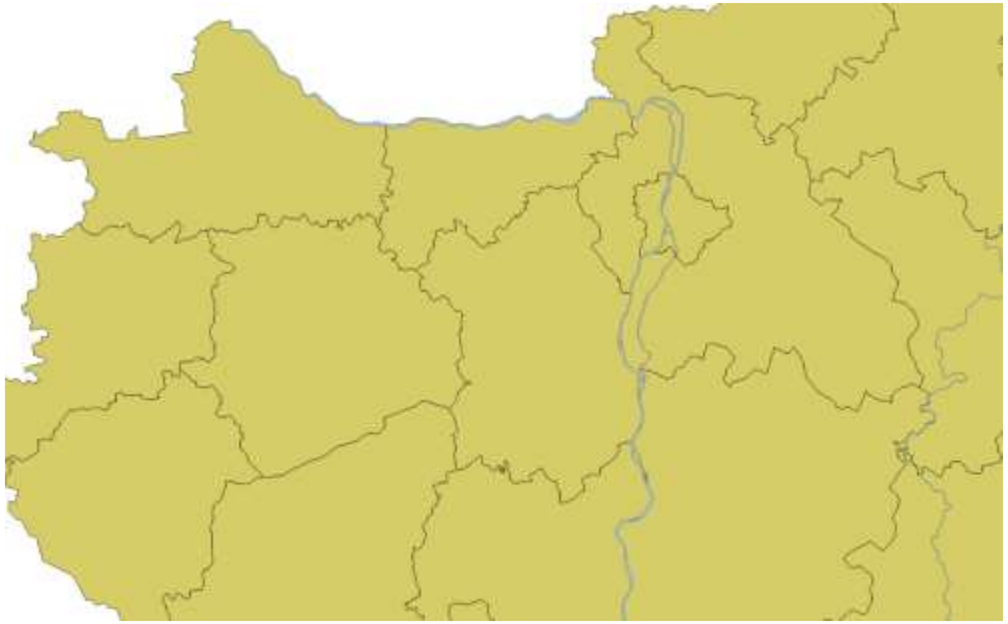
# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?
- Mely megyékben található a Balaton?

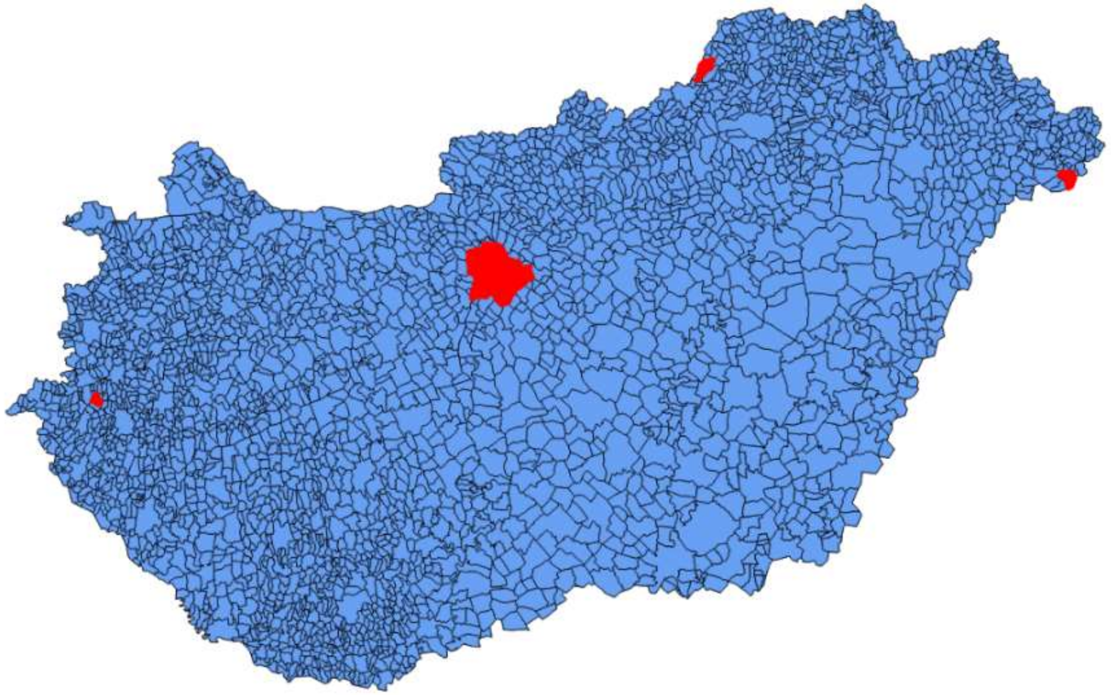
# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?
- Mely megyékben található a Balaton?
- Mely megyéken folyik keresztül a Duna?

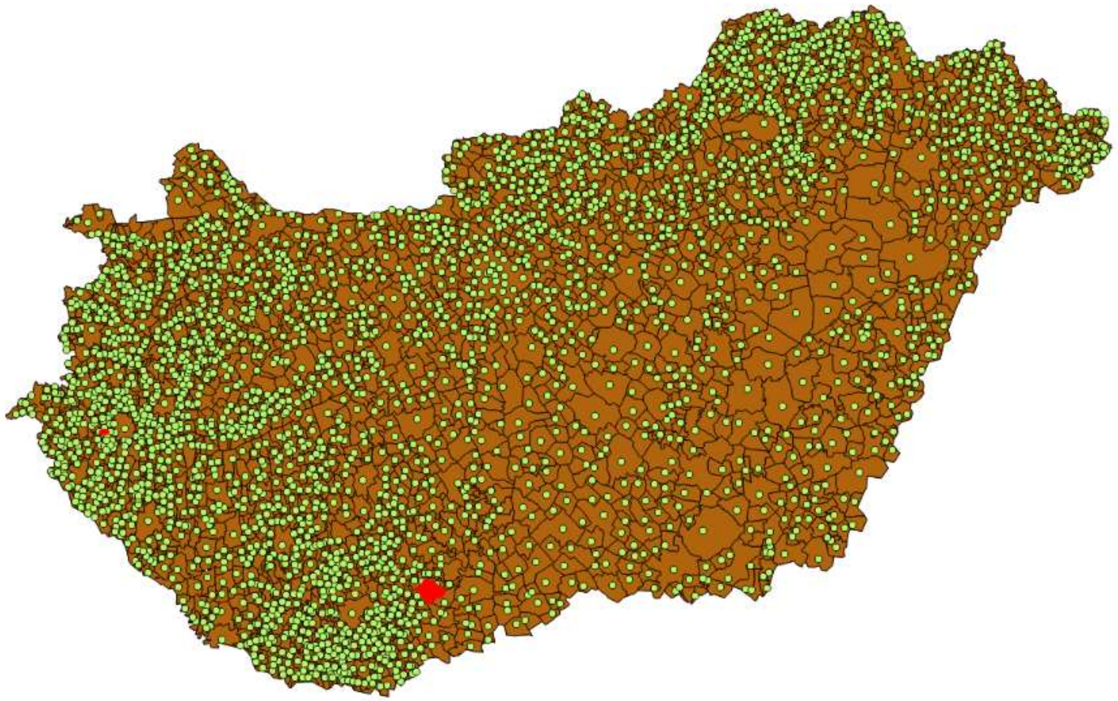
# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.

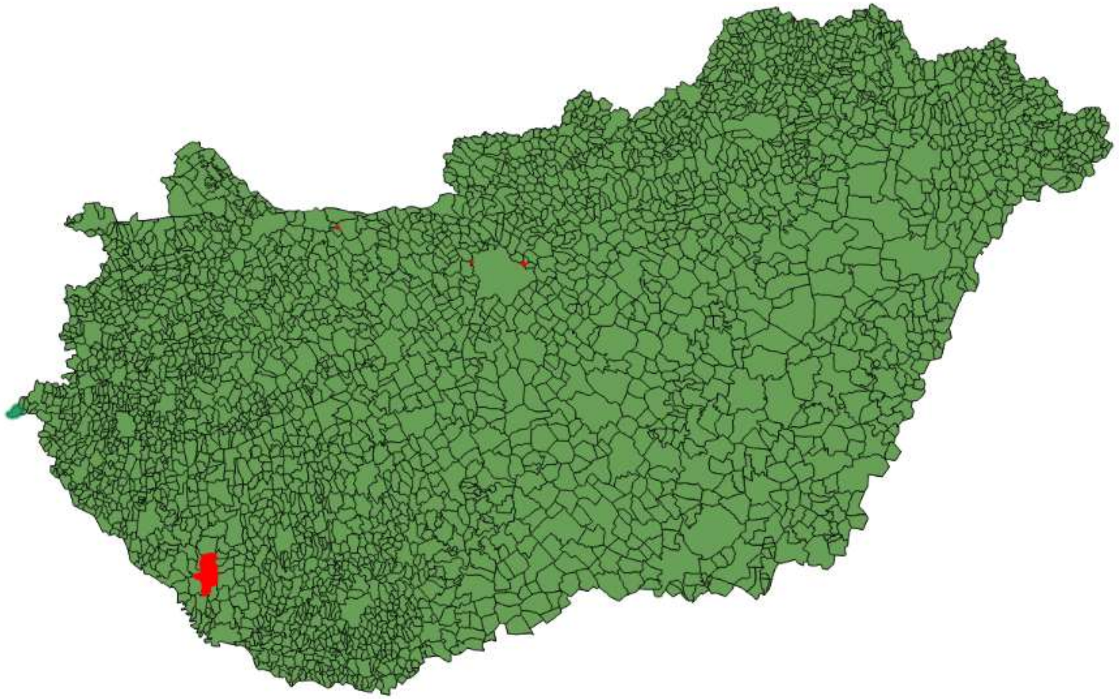
# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.
- Minden település külterülethez tartoznia kell legalább egy településnek.

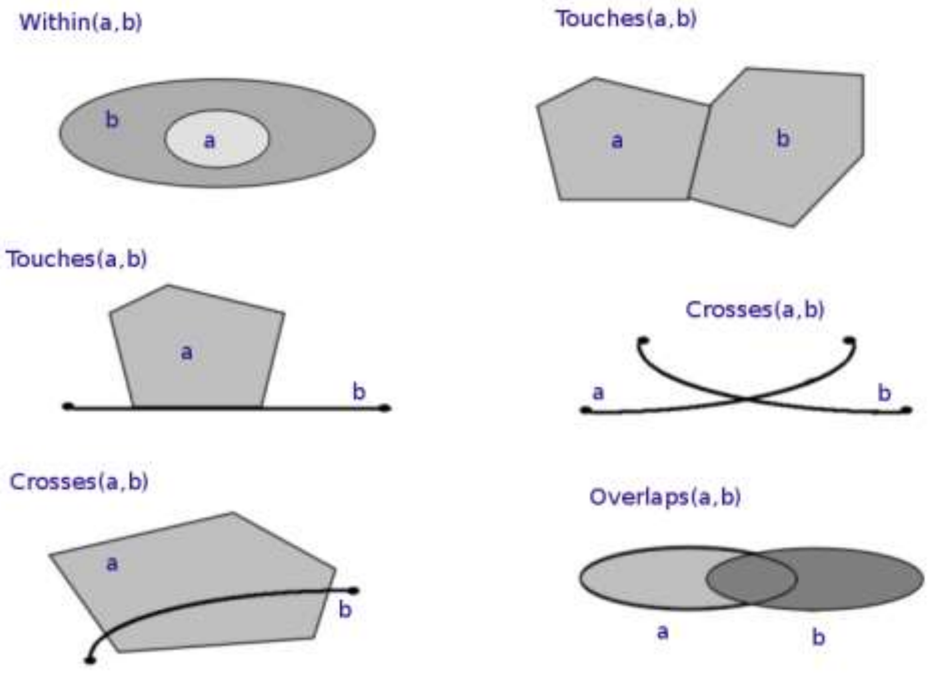
# FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



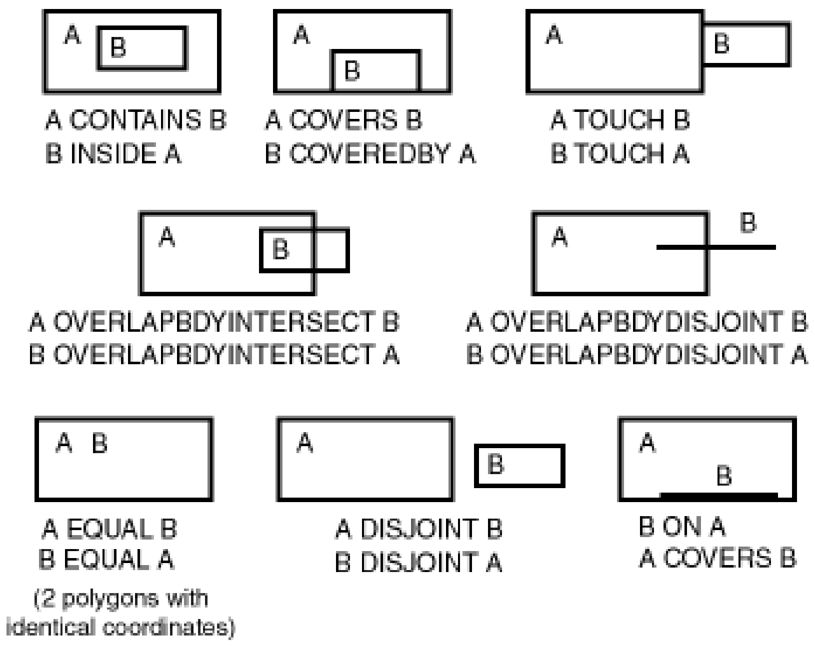
Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.
- Minden település külterülethez tartoznia kell legalább egy településnek.
- Nem lehetnek rések a külterület határok között.

# TÉRBELI RELÁCIÓK

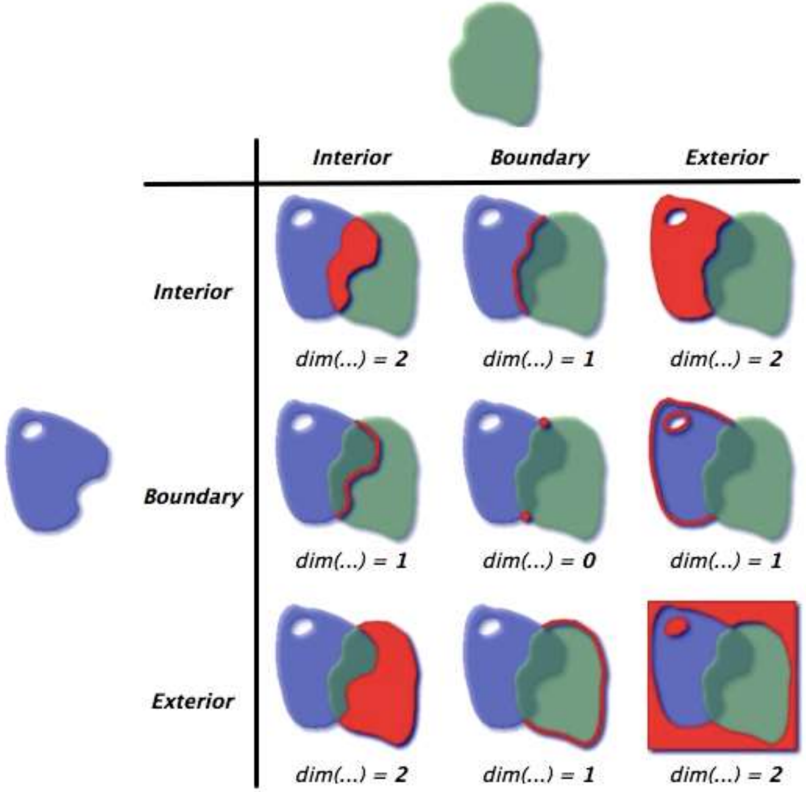



*Forrás: wikipedia.org*




*Forrás: oracle.com*

# DIMENSIONALLY EXTENDED NINE-INTERSECTION MODEL (DE-9IM)

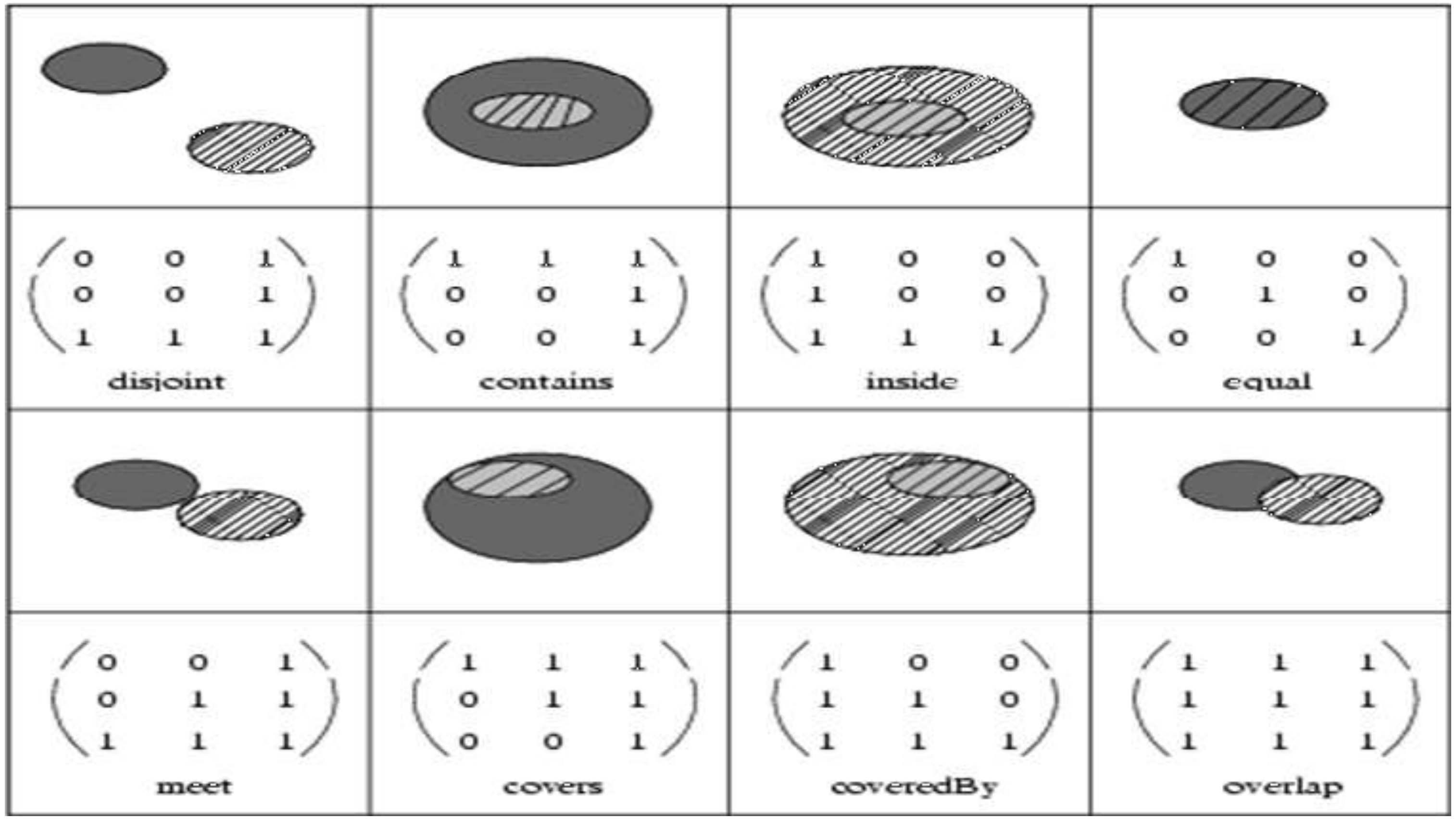



$$\mathrm{DE9IM}(a,b) = \begin{bmatrix} \dim(I(a)\cap I(b)) & \dim(I(a)\cap B(b)) & \dim(I(a)\cap E(b)) \\ \dim(B(a)\cap I(b)) & \dim(B(a)\cap B(b)) & \dim(B(a)\cap E(b)) \\ \dim(E(a)\cap I(b)) & \dim(E(a)\cap B(b)) & \dim(E(a)\cap E(b)) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{bin}(\mathrm{DE9IM}(a,b)) = \mathrm{9IM}(a,b) = \begin{bmatrix} a^o \cap b^o \neq \emptyset & a^o \cap \partial b \neq \emptyset & a^o \cap b^e \neq \emptyset \\ \partial a \cap b^o \neq \emptyset & \partial a \cap \partial b \neq \emptyset & \partial a \cap b^e \neq \emptyset \\ a^e \cap b^o \neq \emptyset & a^e \cap \partial b \neq \emptyset & a^e \cap b^e \neq \emptyset \end{bmatrix}$$

*Forrás: opengeo.org*

# TÉRBELI RELÁCIÓK
## NINE-INTERSECTION MODEL HASZNÁLATÁVAL

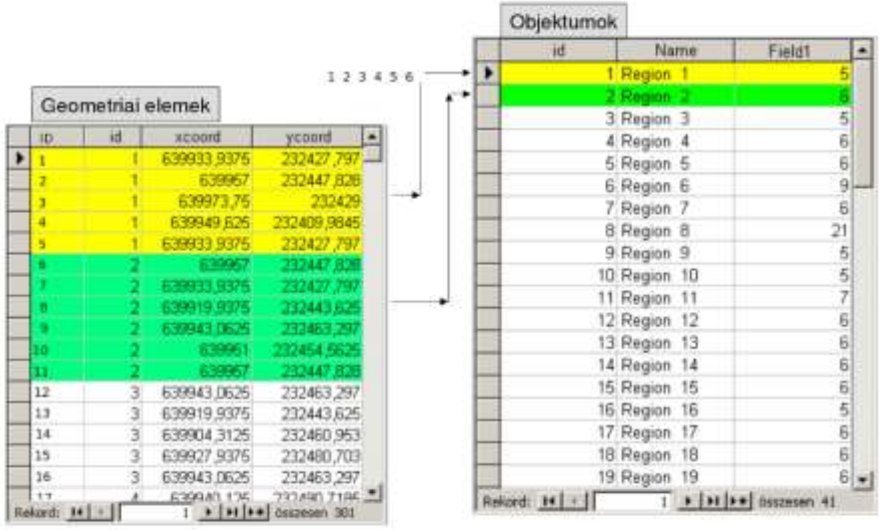



*Forrás: www.spatial.cs.umn.edu*

# SPAGETTI MODELL

A spagetti modell egy olyan vektoros adatmodell, amely a csúcsokon és az összekötési szabályokon kívül mást nem vesz figyelembe.

- Nem vizsgálja, hogy van-e közvetlen szomszédja egy poligonnak, és így vannak-e közös csúcsai a szomszédos poligonoknak.
- Nem törődik a folytonossággal, és az egyes objektumok esetleges térbeli sorrendiségével, szomszédságával.
- Előnye az egyszerűsége, amely egyben a hátránya is, mivel olyan laza minőségi kritériumok mellett, mint amilyet a spagetti modell kíván meg, nagyon könnyű rossz minőségű adatbázist létrehozni.



# TOPOLOGIKUS ADATSZERKEZETEK

A térbeli relációk folytonos és ismételt kiértékelése:

- túlságosan erőforrás igényes,
- nem hatékony.

A topológiát ezért előfeldolgozási lépésként célszerű a teljes geometriakollekcióra kiszámítani, tárolni, és a továbbiakban azt felhasználva sokkal hatékonyabb lekérdezés-kiértékeléseket végrehajtani. Módosításkor:

- topologikus modellt kell szerkeszteni vagy
- a geometriakollekció változásakor a topológia (részét vagy egészét) is frissíteni kell.

Milyen adatszerkezetben tároljuk a topológiát?

# TOPOLOGIKUS ADATSZERKEZETEK

Általános elvárások:

- térbeli adatok ismétlődésmentes tárolása,
- térbeli kapcsolatok (pl. szomszédság, rákövetkezés) tárolása.

Elméleti háttér:

- Duális gráfokkal történő leírás

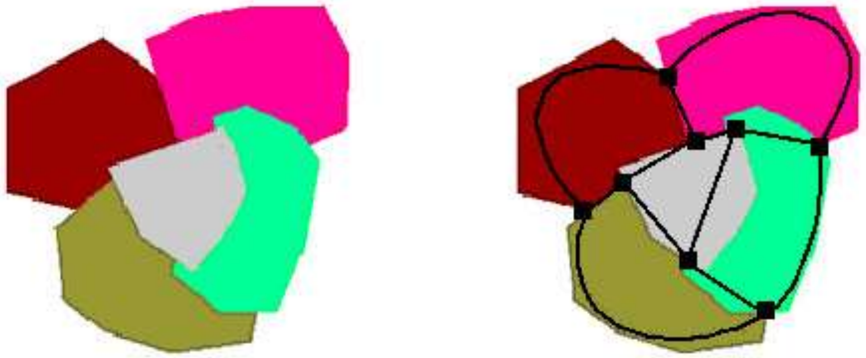
Elterjedt gyakorlati topologikus adatstruktúrák:

- Winged-edge data structure
- Quad-edge data structure

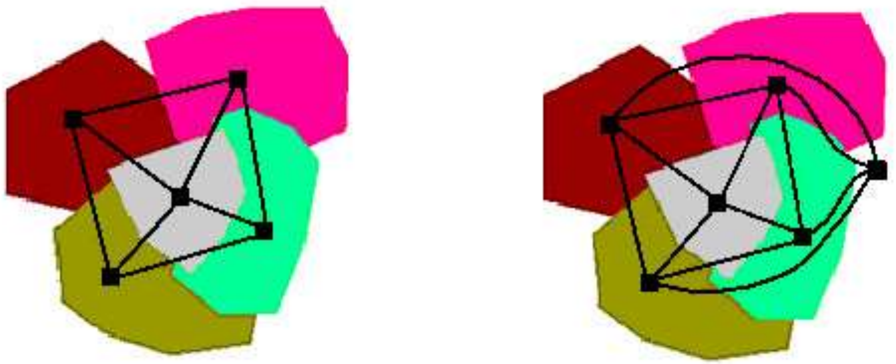
- Half-edge data structure
- Doubly connected edge list

# SÍKGRÁFOK ÉS DUÁLISUK

A **síkgráf** csúcsai az elágazási pontok, ezek között a pontok között élek pedig ott lesznek, ahol ezen a pontok között polylineok találhatók. Ezekben az élekben tároljuk azt is, hogy tőle jobbra és balra milyen területek vannak.
A **síkgráf duális**ában a csúcsok a területek, az élek pedig azt jelentik, hogy egy területnek egy másik a szomszédja. A területhez tároljuk el az őt határoló polylineokat is, egyszóval azt a valódi poligont, amit az reprezentál.



Illeszkedő poligonok és síkgráfuk



Síkgráf duálisa és a befoglaló területekkel kiegészítve

# WINGED-EDGE DATA STRUCTURE

Élek reprezentációja:

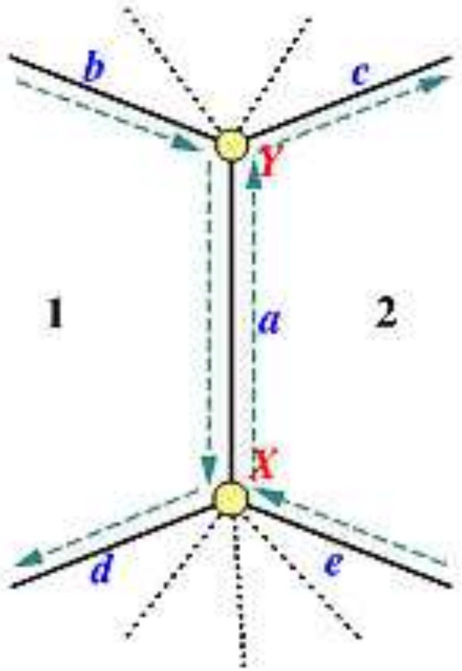
- Név: a
- Csúcspontok:
  - kiindulás: X
  - vég: Y
- Felületek:
  - bal: 1
  - jobb: 2
- Bal felület bejárása:
  - megelőző él: b
  - rákövetkező él: d
- Jobb felület bejárása:
  - megelőző él: e
  - rákövetkező él: c

Csúcspontok reprezentációja:

- név: X
- él: d
- (pozíció: koordináta)

Felületek reprezentációja:

- Név: 1
- Él: b



# HALF-EDGE DATA STRUCTURE

Fél-élek reprezentációja:

- vég csúcspont
- ellentett fél-él
- rákövetkező fél-él
- határos felület

Élek reprezentációja:

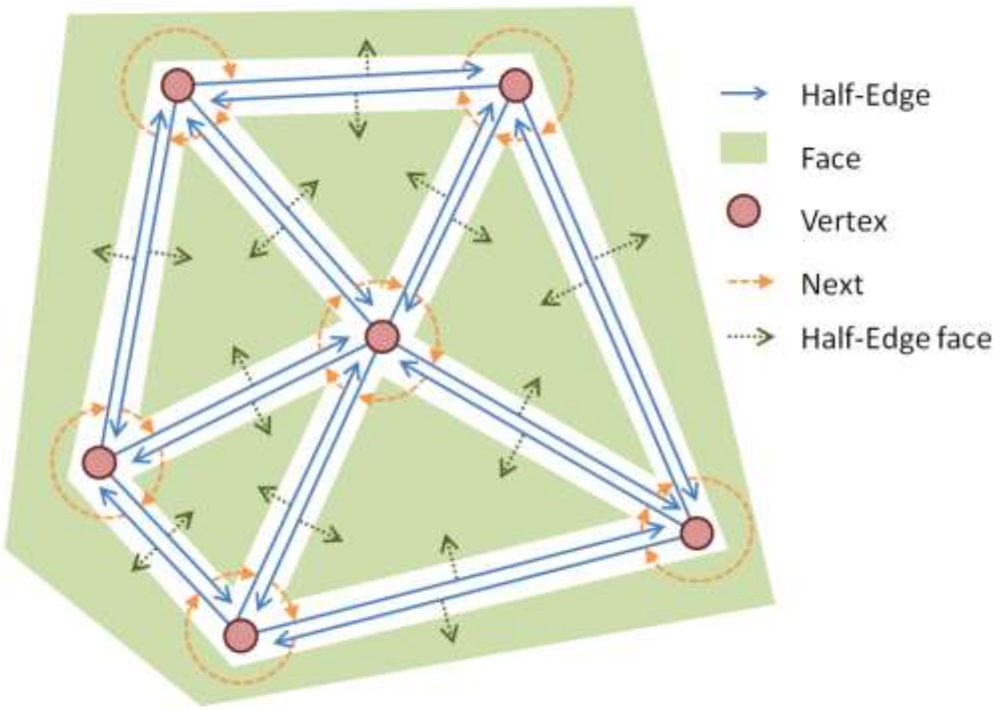
- egyik fél-él

Csúcspontok reprezentációja:

- egyik kiinduló fél-él
- (pozíció: koordináta)

Felületek reprezentációja:

- egyik határos fél-él



# ALGORITMUSOK
## A TOPOLÓGIA KIALAKÍTÁSÁHOZ

Pont poligon általi tartalmazása

- Crossing Number algoritmus
- Winding Number algoritmus

Él-láncok metszése

- Shamos-Hoey algoritmus *(vizsgálat)*
- Bentley-Ottmann algoritmus *(meghatározás)*

Poligonok metszése

- Sutherland-Hodgman algoritmus *(konvex)*
- Vatti algoritmus
- Greiner-Hormann algoritmus
- Weiler-Atherton algoritmus

# WINDING NUMBER ALGORITMUS

Szabályok:

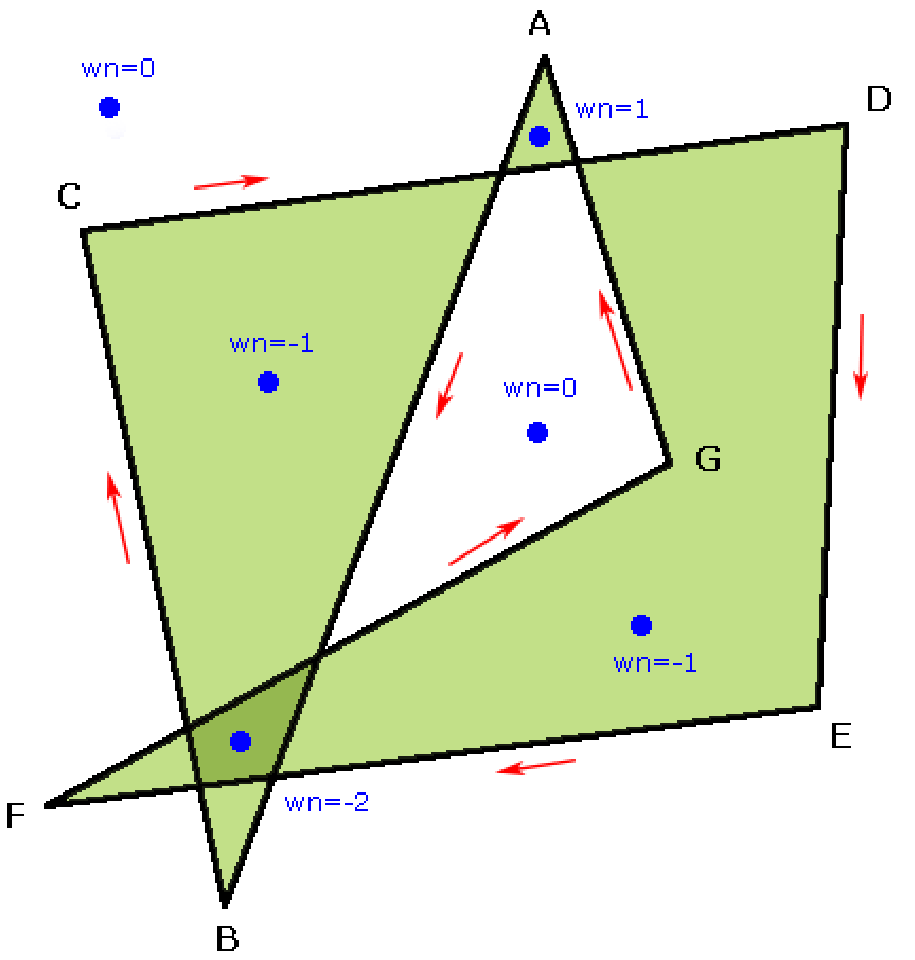
- Felfelé keresztező él,
  óramutató szerinti ellentétes bejárással:
  $$wn \coloneqq wn + 1$$

- Lefele keresztező él,
  óramutató szerinti bejárással:
  $$wn \coloneqq wn - 1$$

- A pont a poligon kívül van $\Leftrightarrow \mathrm{wn} = 0$

Algoritmikus komplexitás: $\theta(2n)$

- $n$: élek száma



# BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

Event: 0

- EQ: $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: Ø

Event: 1 ($S_1$)

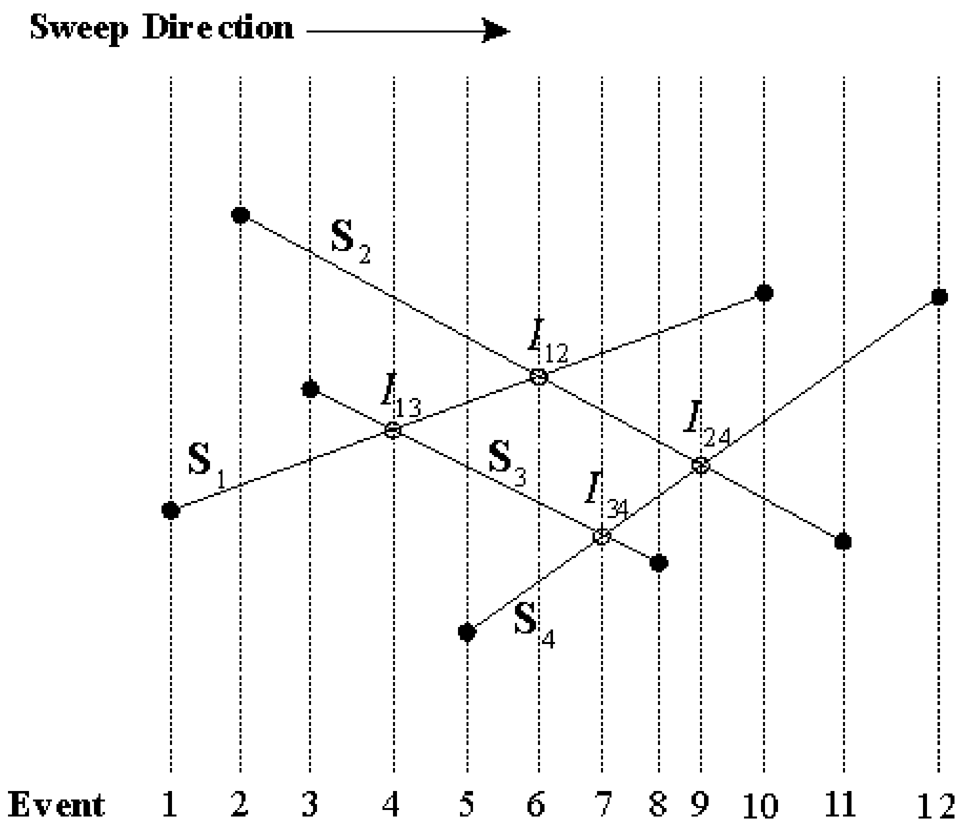
- EQ: $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: S1

Event: 2 ($S_2$)

- EQ: $S_3$, $S_4$, $I_{12}$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_1$, $S_2$

Event: 3 ($S_3$)

- EQ: $I_{13}$, $S_4$ , $I_{12}$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_1$, $S_3$, $S_2$




Forrás: geomalgorithms.com

# BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

Event: 4 ($I_{13}$)

- EQ: $S_4$ , $I_{12}$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_3$, $S_1$, $S_2$

Event: 5 ($S_4$)

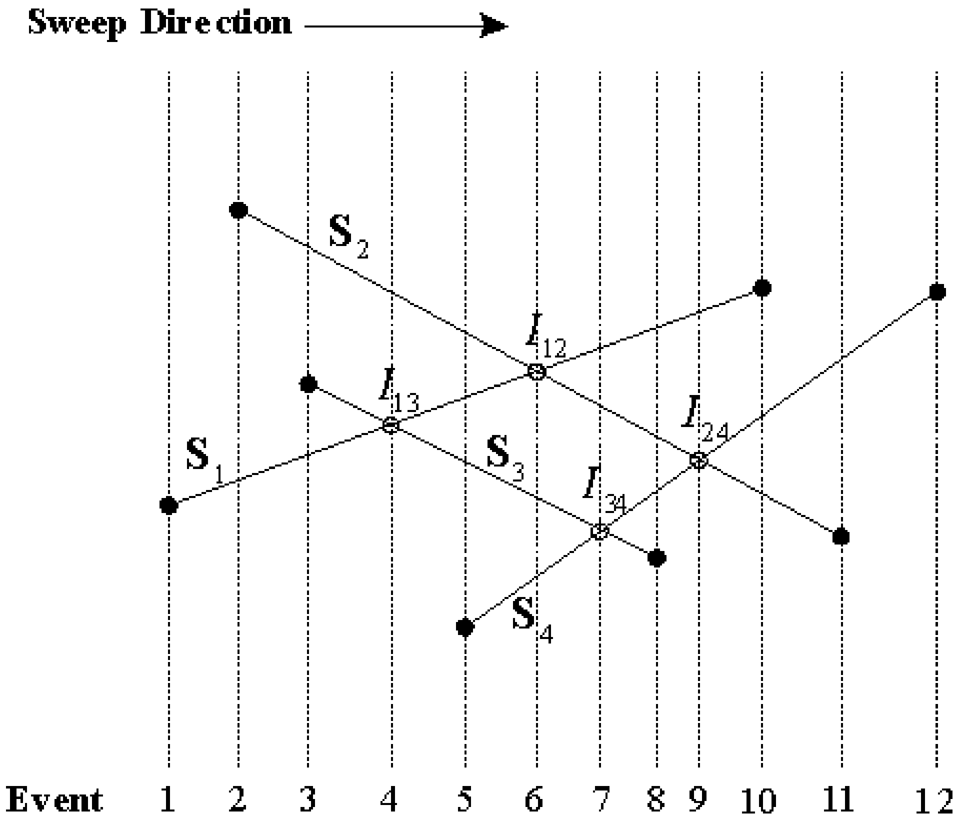
- EQ: $I_{12}$, $I_{34}$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_4$, $S_3$, $S_1$, $S_2$

Event: 6 ($I_{12}$)

- EQ: $I_{34}$, $S_3$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_4$, $S_3$, $S_2$, $S_1$

Event: 7 ($I_{34}$)

- EQ: $S_3$, $I_{24}$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_3$, $S_4$, $S_2$, $S_1$




Forrás: geomalgorithms.com

# BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

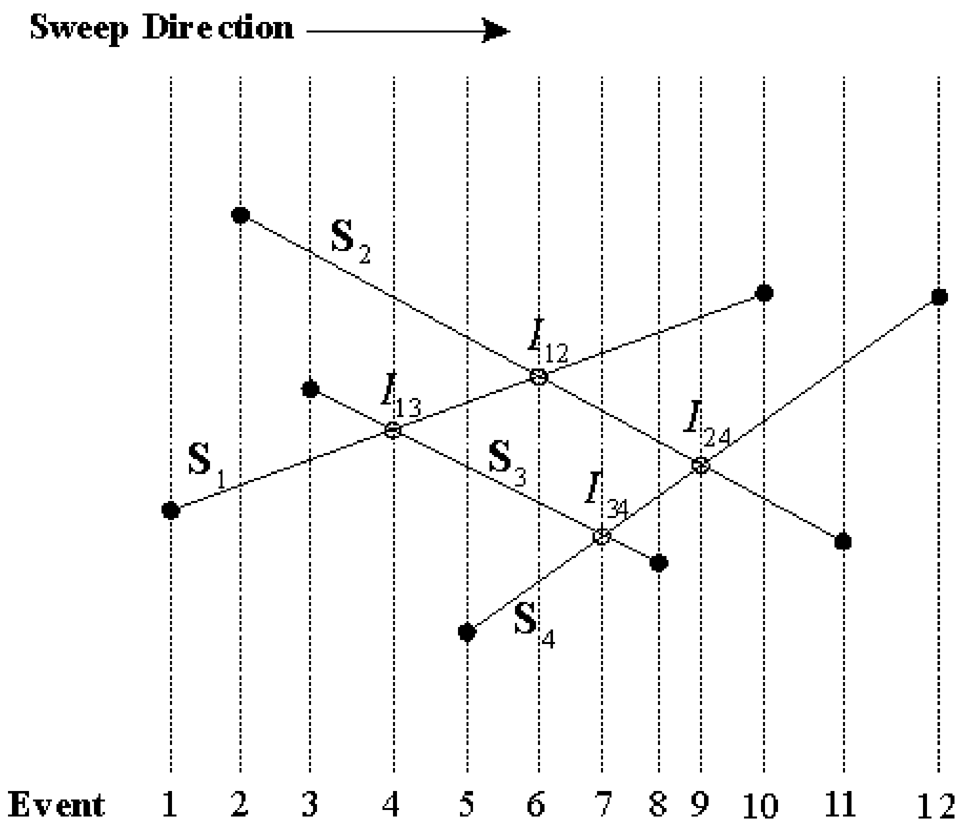
Event: 8 ($S_3$)
- EQ: $I_{24}$, $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_4$, $S_2$, $S_1$

Event: 9 ($I_{24}$)
- EQ: $S_1$, $S_2$, $S_4$
- SL: $S_2$, $S_4$, $S_1$

Event: 10 ($S_1$)
- EQ: $S_2$, $S_4$
- SL: $S_2$, $S_4$

Event: 11 ($S_2$)
- EQ: $S_4$
- SL: $S_4$

Algoritmikus komplexitás: $\theta\big((n+k)\log n\big)$
- $n$: élszegmensek száma
- $k$: metszéspontok száma




Forrás: geomalgorithms.com

# GREINER-HORMANN ALGORITMUS

**Csúcslisták:**

- P: $P_0$, $I_1$, $I_0$, $P_1$, $I_2$, $I_3$, $P_2$, $I_4$, $P_3$, $I_5$, $P_4$
- Q: $Q_0$, $Q_1$, $I_0$, $I_2$, $Q_2$, $Q_3$, $I_5$, $I_4$, $I_3$, $I_1$

**Belépési pontok:** $I_1$, $I_2$, $I_4$

**Feldolgozási szabály:**

1. Belépési ponttól elindulunk P listán.
2. Metszéspontnál listát váltunk.
3. A kiindulási ponthoz visszaérkezéskor megkaptunk egy metszet poligont.
4. Töröljük az érintett metszéspontokat a belépési pontok közül; újrakezdjük a feldolgozást.

**Speciális esetek:**

- Több egymást követő belépési (ill. kilépési) pont
- Belépési/kilépési pontok (érintés)