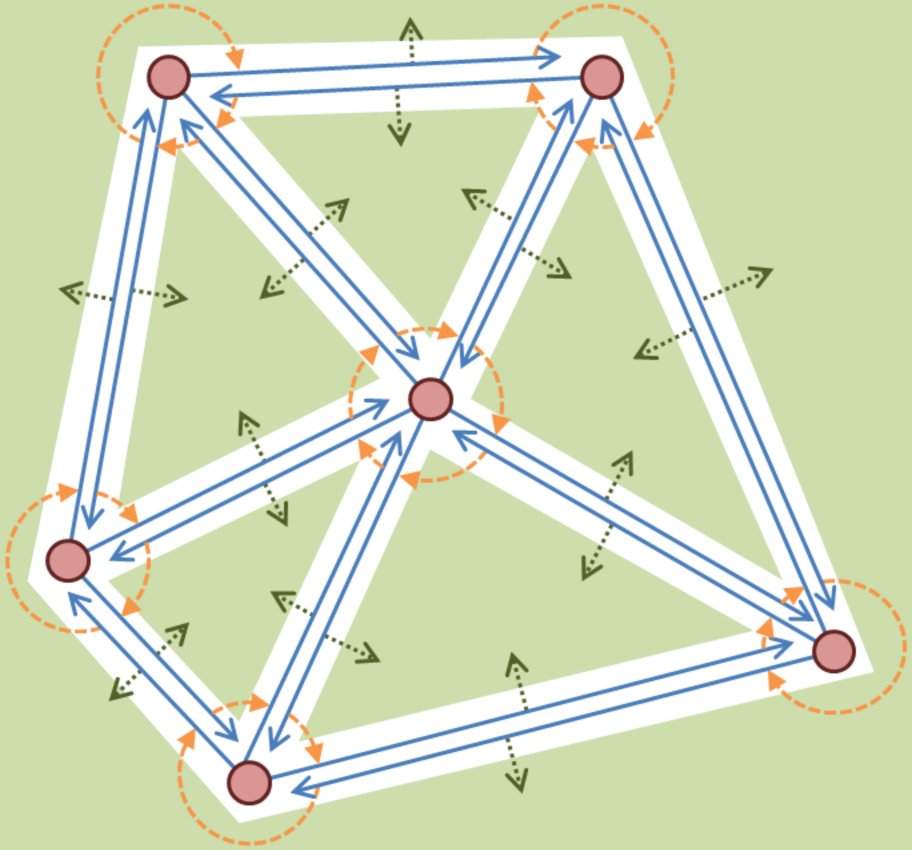


Topológiai algoritmusok és adatszerkezetek

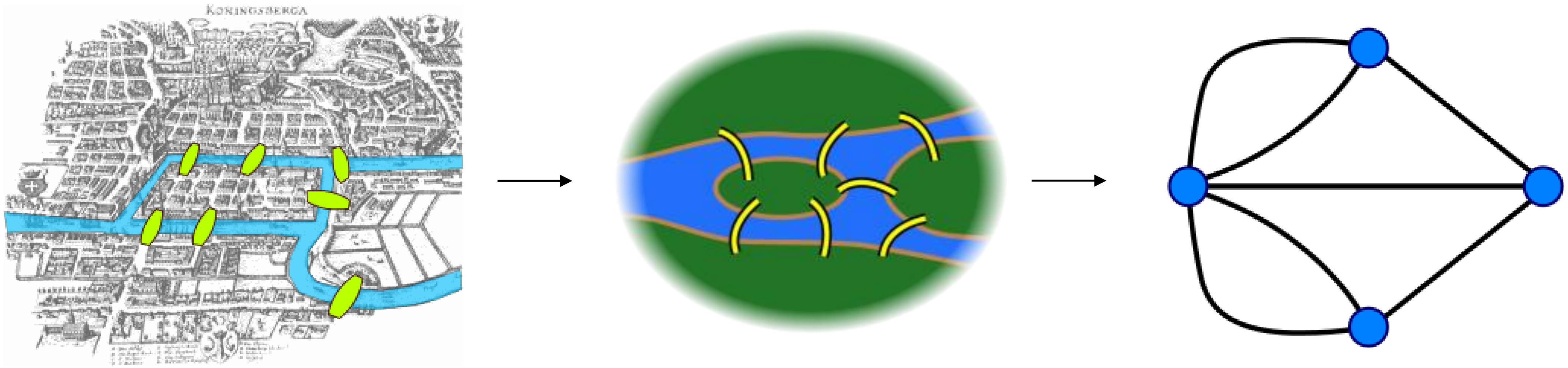
TÉRINFORMATIKAI ALGORITMUSOK

Cserép Máté
mcserep@inf.elte.hu
2017. november 22.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM INFORMATIKAI KAR

BEVEZETŐ

Topológia: olyan matematikai tudomány, mely bizonyos geometriai tulajdonságokból kiindulva, azok általánosítása alapján, algebrai törvényszerűségeket határoz meg.



Példa: a königsbergi hidak problémájának gráfelméleti megoldása *(Euler)*

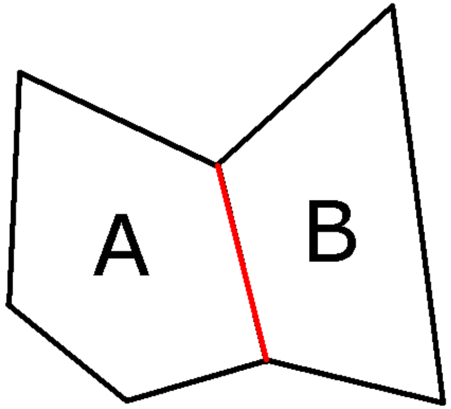
BEVEZETŐ

Geometriai topológia: a téralakzatok azon tulajdonságait vizsgálja, melyek nem változnak az idomok szakadásmentes torzítása során.

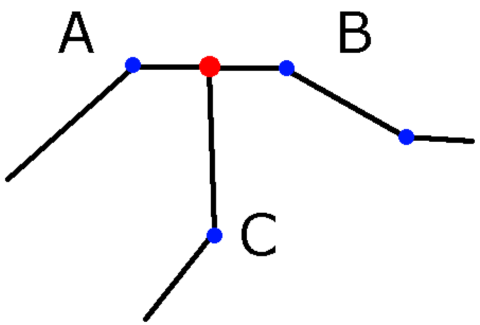
„A topológus az, aki nem tud megkülönböztetni egy bögrét egy amerikai fánktól.” - Paul Renteln és Alan Dundes

BEVEZETŐ

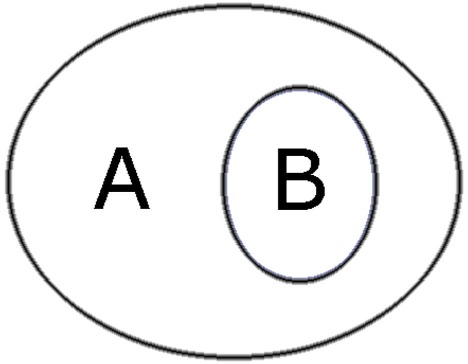
Térinformatikai topológia: a vektoros téralakzatok szakadásmentes torzítás során is fennmaradó invariáns kapcsolatainak, tulajdonságainak vizsgálata.



Szomszédság

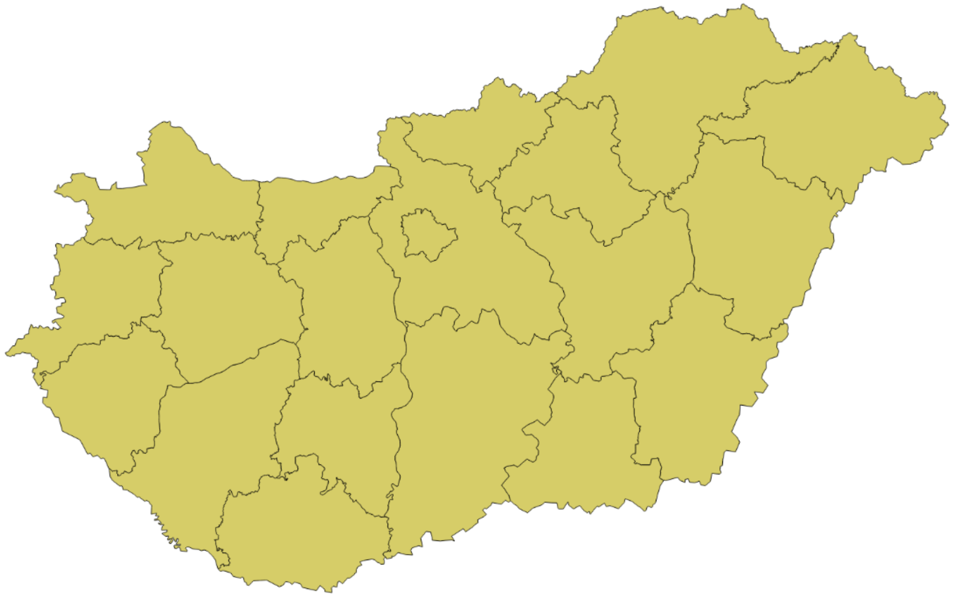


Kapcsolódás / Folyamatosság



Tartalmazás

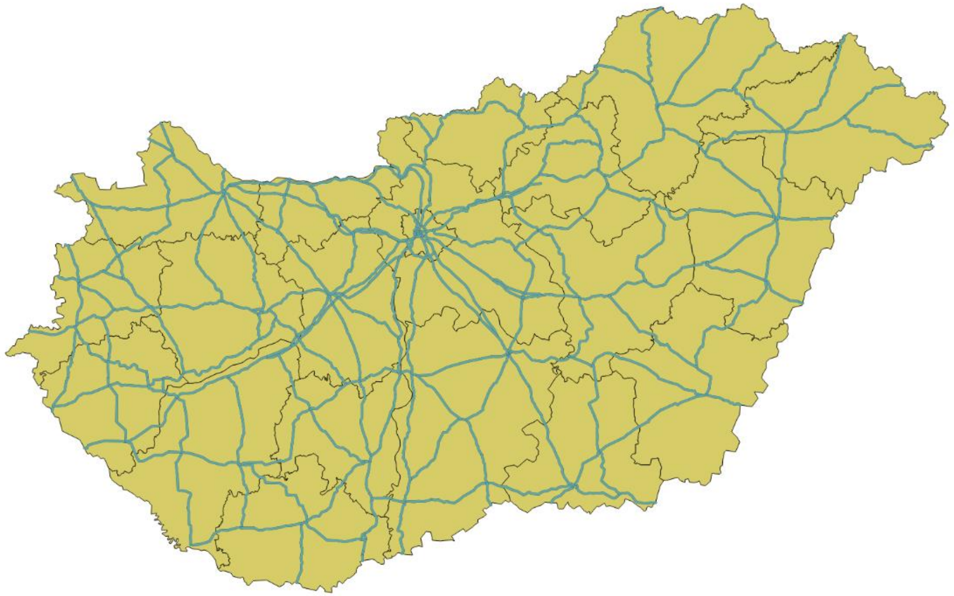
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?

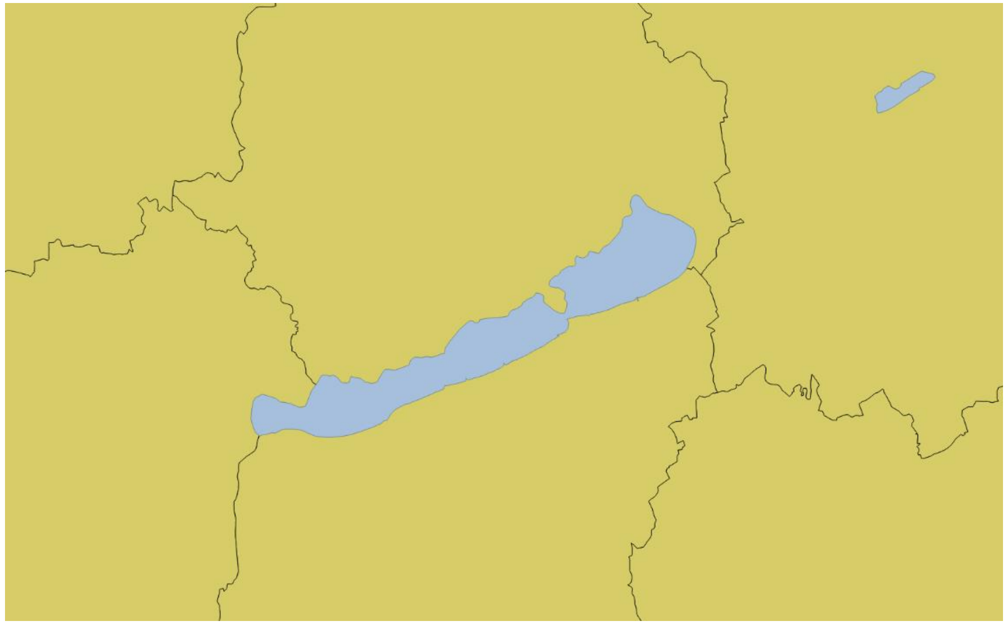
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?

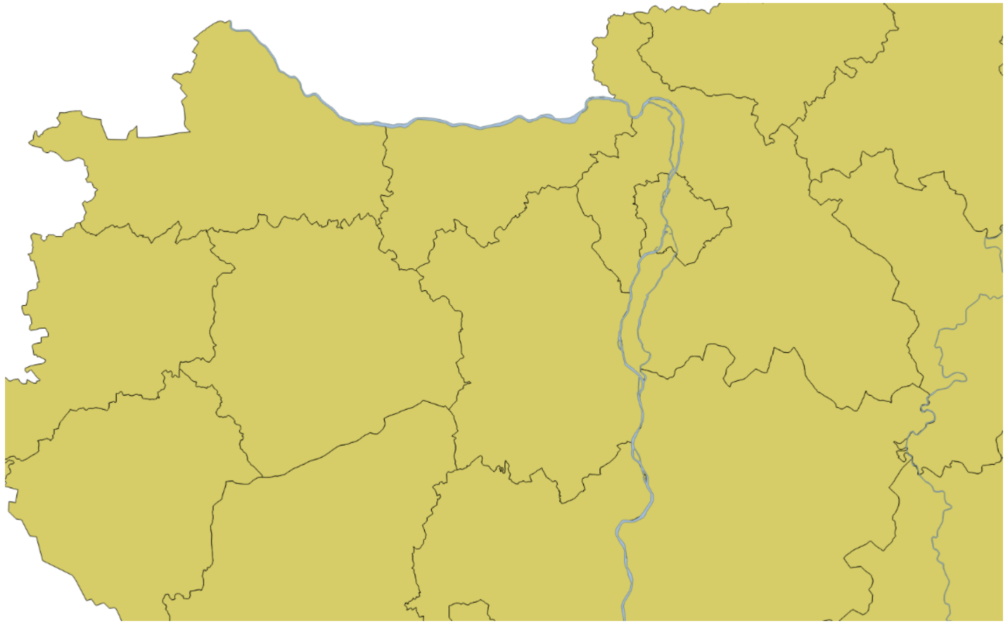
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?
- Mely megyékben található a Balaton?

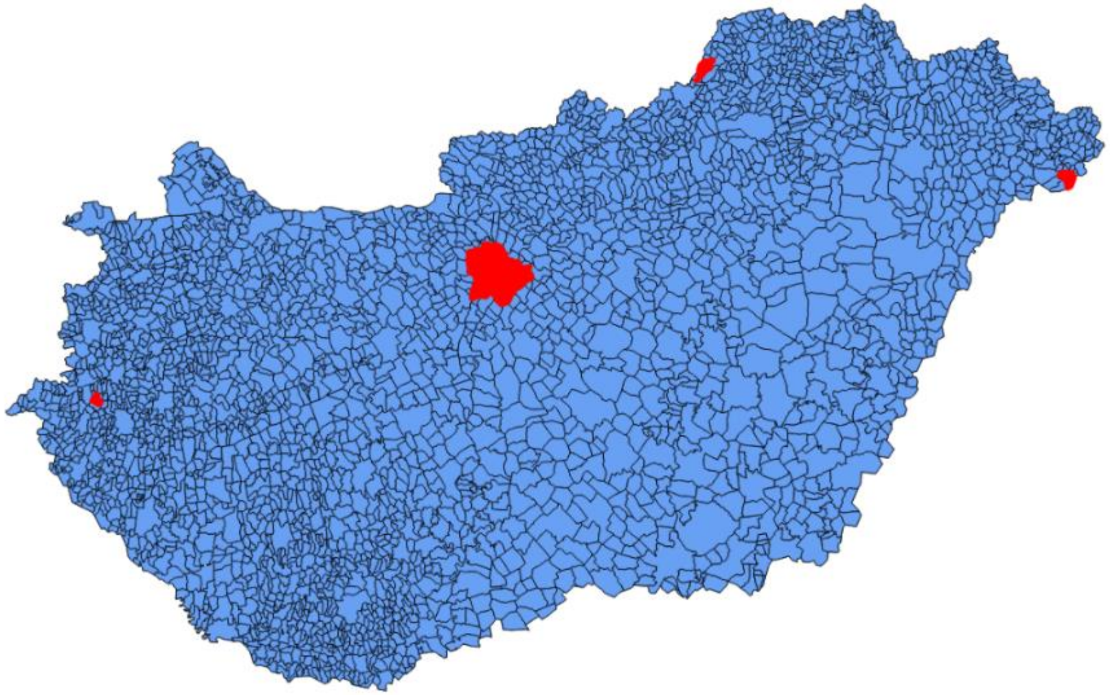
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Topológiai relációk lekérdezése

- Mely megyékkel határos Veszprém megye?
- Mely főutakra lehet ráhajtani az M3-as autópályáról?
- Mely megyékben található a Balaton?
- Mely megyéken folyik keresztül a Duna?

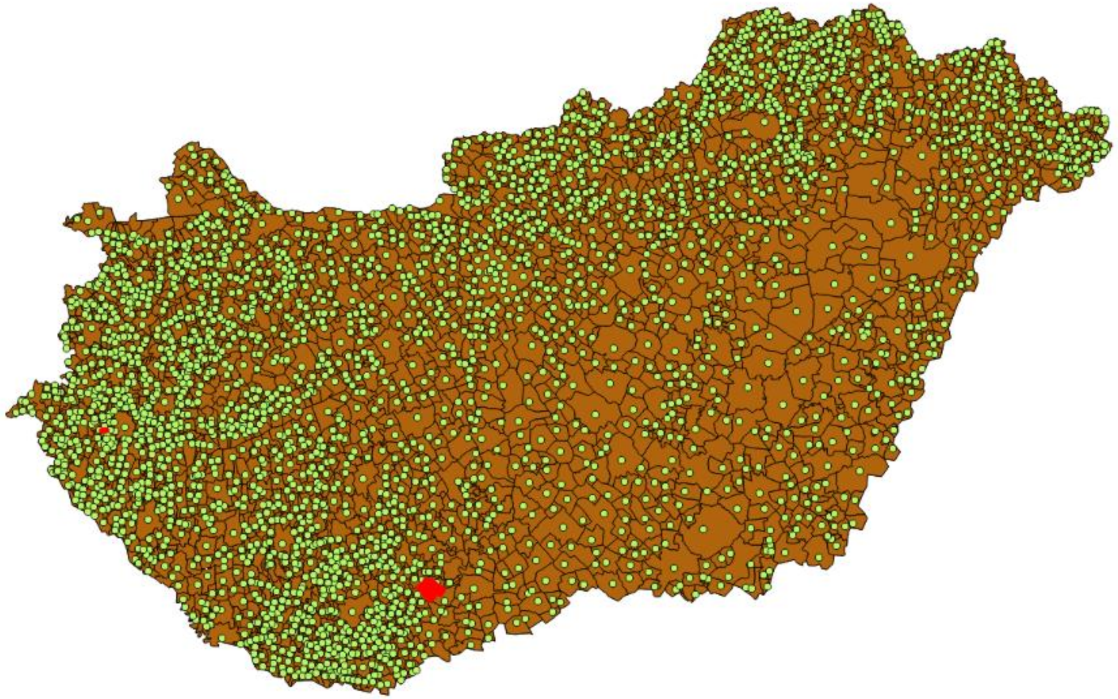
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.

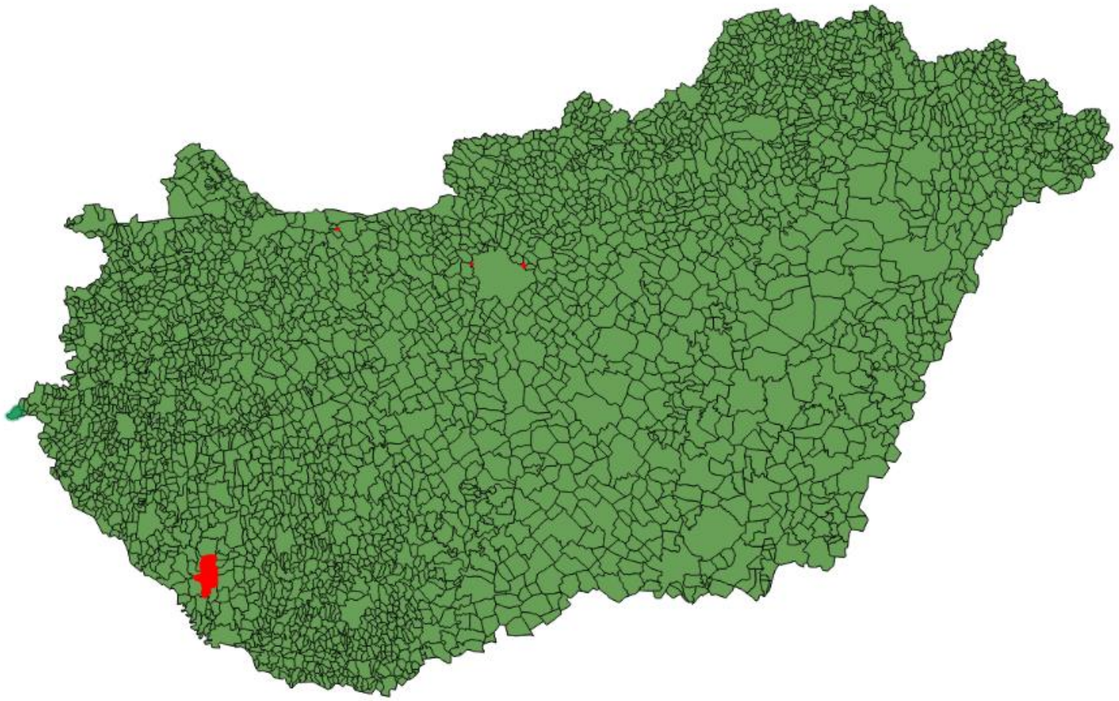
FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.
- Minden település külterülethez tartoznia kell legalább egy településnek.

FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK



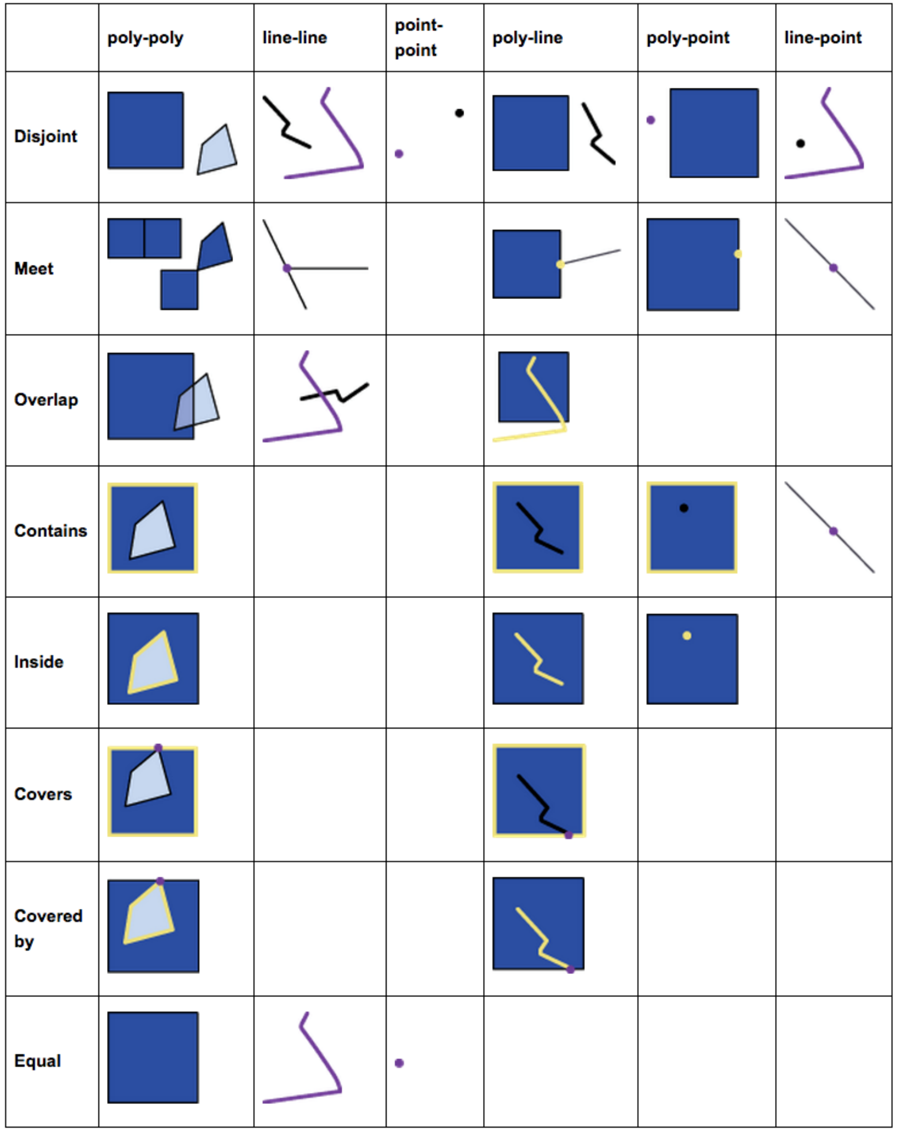
Adatok ellenőrzése:

- Minden település külterület kizárólag egy megyéhez tartozhat.
- Minden település külterülethez tartoznia kell legalább egy településnek.
- Nem lehetnek rések a külterület határok között.

TÉRBELI RELÁCIÓK

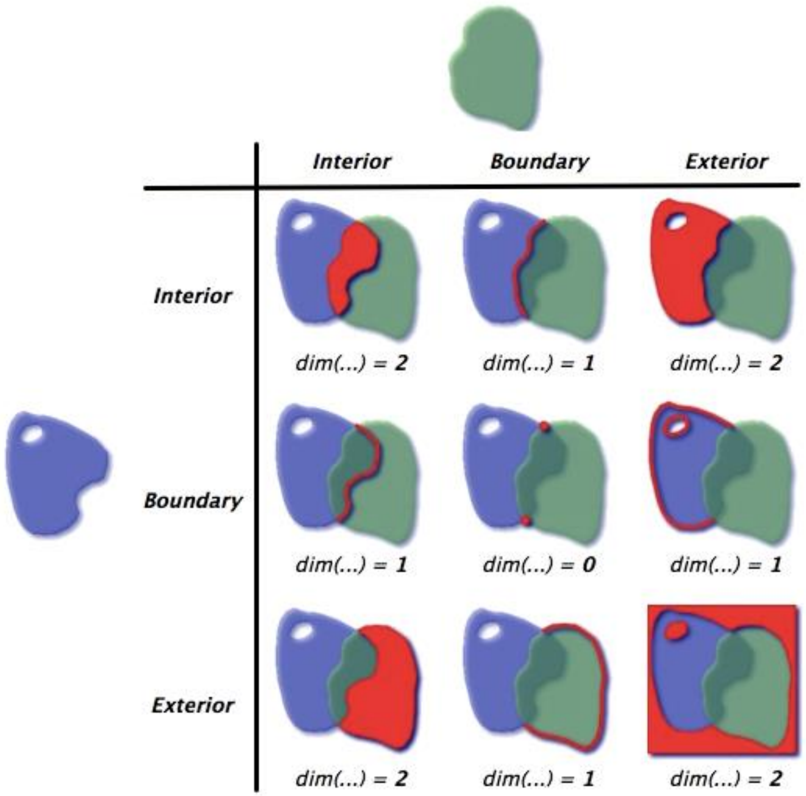
A térbeli kapcsolatok definiálhatók:

- poligon és poligon között
- poligon és vonallánc között
- poligon és pont között
- vonallánc és vonallánc között
- vonallánc és pont között
- pont és pont között



Forrás: Geographic Information Technology Training Alliance

DIMENSIONALLY EXTENDED NINE-INTERSECTION MODEL (DE-9IM)

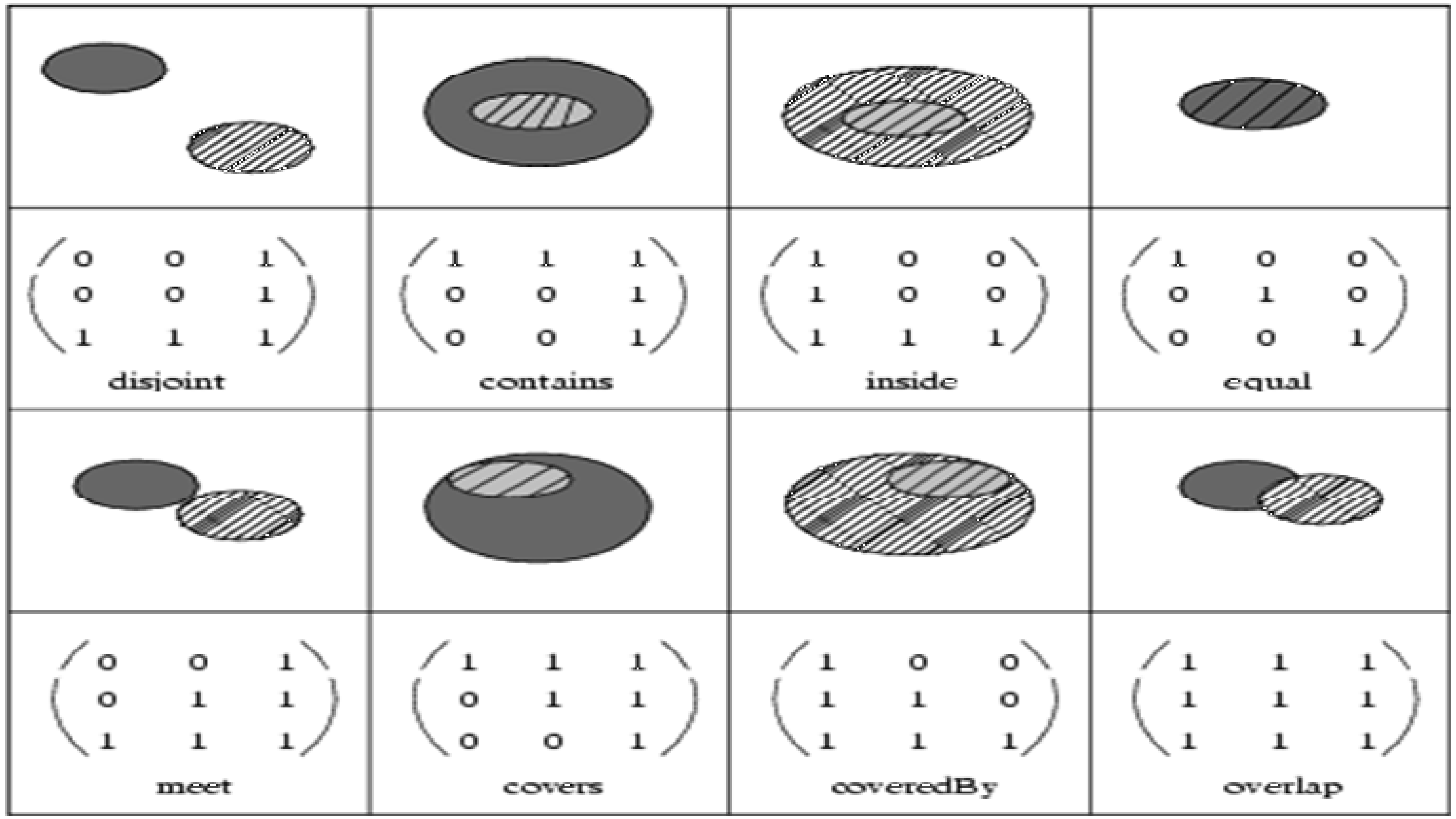


$$\mathrm{DE9IM}(a,b) = \begin{bmatrix} \dim(I(a)\cap I(b)) & \dim(I(a)\cap B(b)) & \dim(I(a)\cap E(b)) \\ \dim(B(a)\cap I(b)) & \dim(B(a)\cap B(b)) & \dim(B(a)\cap E(b)) \\ \dim(E(a)\cap I(b)) & \dim(E(a)\cap B(b)) & \dim(E(a)\cap E(b)) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{bin}(\mathrm{DE9IM}(a,b)) = 9\mathrm{IM}(a,b) = \begin{bmatrix} a^o \cap b^o \neq \emptyset & a^o \cap \partial b \neq \emptyset & a^o \cap b^e \neq \emptyset \\ \partial a \cap b^o \neq \emptyset & \partial a \cap \partial b \neq \emptyset & \partial a \cap b^e \neq \emptyset \\ a^e \cap b^o \neq \emptyset & a^e \cap \partial b \neq \emptyset & a^e \cap b^e \neq \emptyset \end{bmatrix}$$

Forrás: Boundless Spatial

TÉRBELI RELÁCIÓK
NINE-INTERSECTION MODEL HASZNÁLATÁVAL

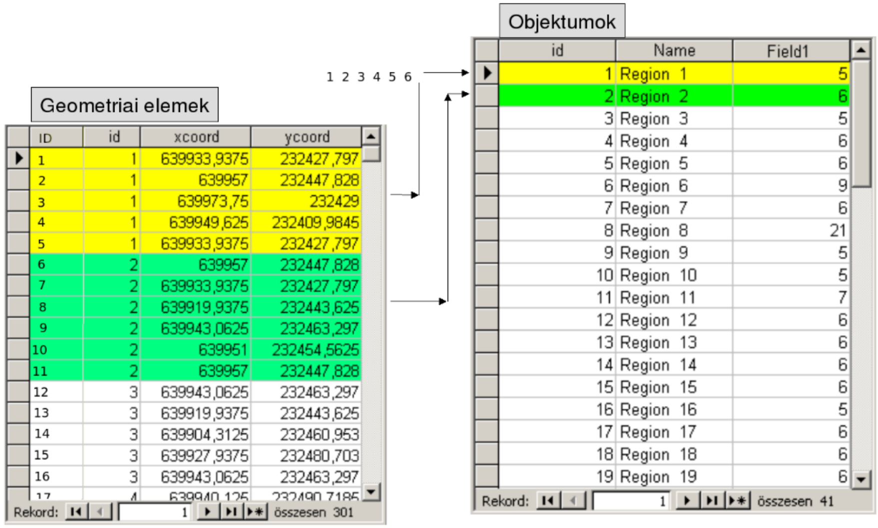


Forrás: University of Minnesota

SPAGETTI MODELL

A spagetti modell egy olyan vektoros adatmodell, amely a csúcsokon és az összekötési szabályokon kívül mást nem vesz figyelembe.

- Nem vizsgálja, hogy van-e közvetlen szomszédja egy poligonnak, és így vannak-e közös csúcsai a szomszédos poligonoknak.
- Nem törődik a folytonossággal, és az egyes objektumok esetleges térbeli sorrendiségével, szomszédságával.
- Előnye az egyszerűsége, amely egyben a hátránya is, mivel olyan laza minőségi kritériumok mellett, mint amilyet a spagetti modell kíván meg, nagyon könnyű rossz minőségű adatbázist létrehozni.



Geometriai elemek

ID	id	xcoord	ycoord
1	1	639933,9375	232427,797
2	1	639957	232447,828
3	1	639973,75	232429
4	1	639949,625	232409,9845
5	1	639933,9375	232427,797
6	2	639957	232447,828
7	2	639933,9375	232427,797
8	2	639919,9375	232443,625
9	2	639943,0625	232463,297
10	2	639951	232454,5625
11	2	639957	232447,828
12	3	639943,0625	232463,297
13	3	639919,9375	232443,625
14	3	639904,3125	232460,953
15	3	639927,9375	232480,703
16	3	639943,0625	232463,297
17	4	639940,125	232490,7185

Rekord: 1 összesen 301

Objektumok

id	Name	Field1
1	Region 1	5
2	Region 2	6
3	Region 3	5
4	Region 4	6
5	Region 5	6
6	Region 6	9
7	Region 7	6
8	Region 8	21
9	Region 9	5
10	Region 10	5
11	Region 11	7
12	Region 12	6
13	Region 13	6
14	Region 14	6
15	Region 15	6
16	Region 16	5
17	Region 17	6
18	Region 18	6
19	Region 19	6

Rekord: 1 összesen 41

TOPOLOGIKUS ADATSZERKEZETEK

A térbeli relációk folytonos és ismételt kiértékelése:

- túlságosan erőforrás igényes,
- nem hatékony.

A topológiát ezért előfeldolgozási lépésként célszerű a teljes geometriakollekcióra kiszámítani, tárolni, és a továbbiakban azt felhasználva sokkal hatékonyabb lekérdezés-kiértékeléseket végrehajtani. Módosításkor:

- topologikus modellt kell szerkeszteni vagy
- a geometriakollekció változásakor a topológia (részét vagy egészét) is frissíteni kell.

Milyen adatszerkezetben tároljuk a topológiát?

TOPOLOGIKUS ADATSZERKEZETEK

Általános elvárások:

- térbeli adatok ismétlődésmentes tárolása,
- térbeli kapcsolatok (pl. szomszédság, rákövetkezés) tárolása.

Elméleti háttér:

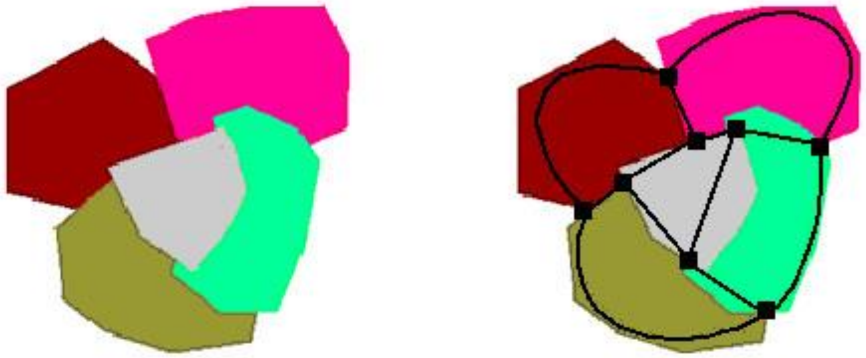
- Duális gráfokkal történő leírás

Elterjedt gyakorlati topologikus adatstruktúrák:

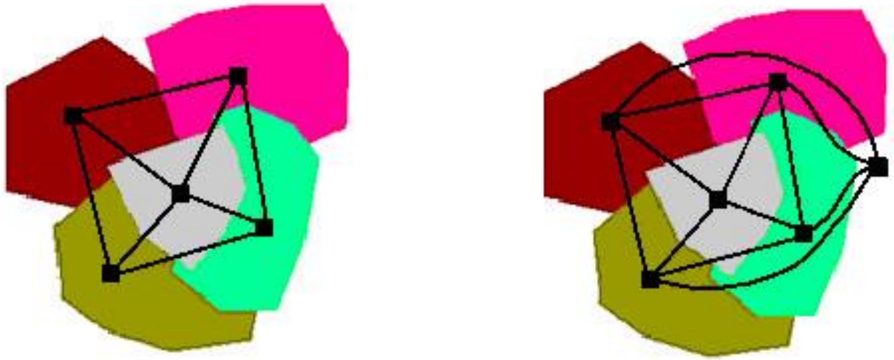
- Winged-edge data structure
- Quad-edge data structure
- Half-edge data structure
- Doubly connected edge list

SÍKGRÁFOK ÉS DUÁLISUK

A **síkgráf** csúcsai az elágazási pontok, ezek között a pontok között élek pedig ott lesznek, ahol ezen a pontok között polylineok találhatók. Ezekben az élekben tároljuk azt is, hogy tőle jobbra és balra milyen területek vannak.
A **síkgráf duális**ában a csúcsok a területek, az élek pedig azt jelentik, hogy egy területnek egy másik a szomszédja. A területhez tároljuk el az őt határoló polylineokat is, egyszóval azt a valódi poligont, amit az reprezentál.



Illeszkedő poligonok és síkgráfuk



Síkgráf duálisa és a befoglaló területekkel kiegészítve

WINGED-EDGE DATA STRUCTURE

Élek reprezentációja:

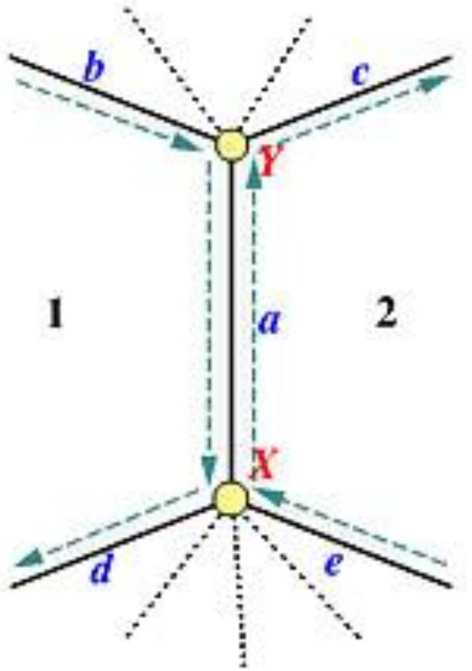
- Név: a
- Csúcspontok:
  - kiindulás: X
  - vég: Y
- Felületek:
  - bal: 1
  - jobb: 2
- Bal felület bejárása:
  - megelőző él: b
  - rákövetkező él: d
- Jobb felület bejárása:
  - megelőző él: e
  - rákövetkező él: c

Csúcspontok reprezentációja:

- név: X
- él: d
- (pozíció: koordináta)

Felületek reprezentációja:

- Név: 1
- Él: b



HALF-EDGE DATA STRUCTURE

Fél-élek reprezentációja:

- vég csúcspont
- ellentett fél-él
- rákövetkező fél-él
- határos felület

Élek reprezentációja:

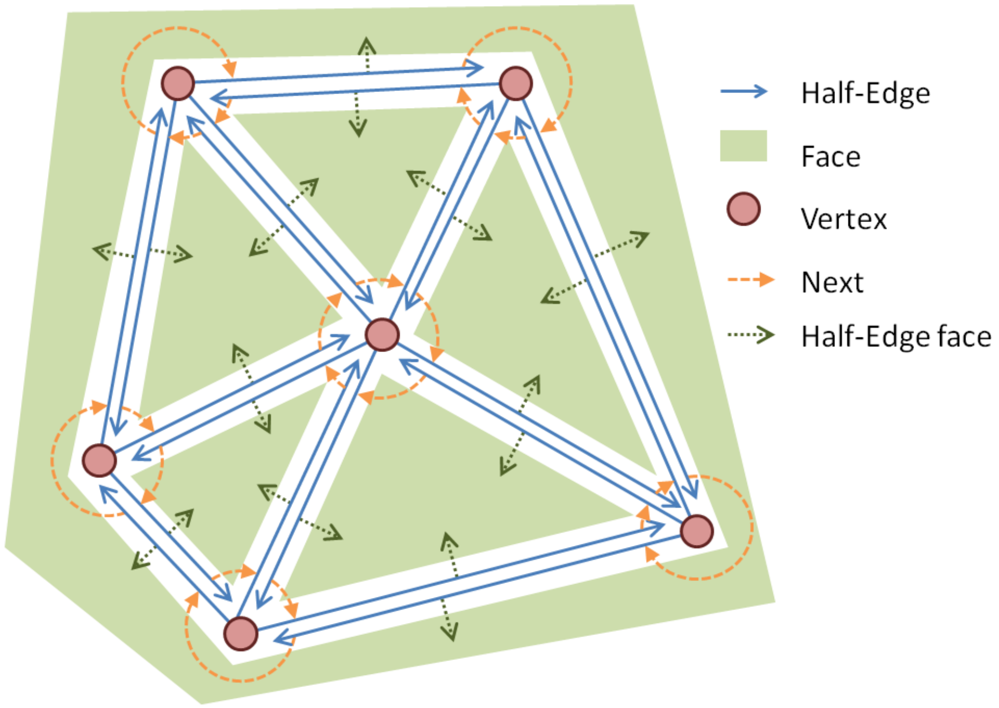
- egyik fél-él

Csúcspontok reprezentációja:

- egyik kiinduló fél-él
- (pozíció: koordináta)

Felületek reprezentációja:

- egyik határos fél-él



ALGORITMUSOK
A TOPOLÓGIA KIALAKÍTÁSÁHOZ

Pont poligon általi tartalmazása

- Crossing Number algoritmus
- Winding Number algoritmus

Él-láncok metszése

- Shamos-Hoey algoritmus *(vizsgálat)*
- Bentley-Ottmann algoritmus *(meghatározás)*

Poligonok metszése

- Sutherland-Hodgman algoritmus *(konvex)*
- Vatti algoritmus
- Greiner-Hormann algoritmus
- Weiler-Atherton algoritmus

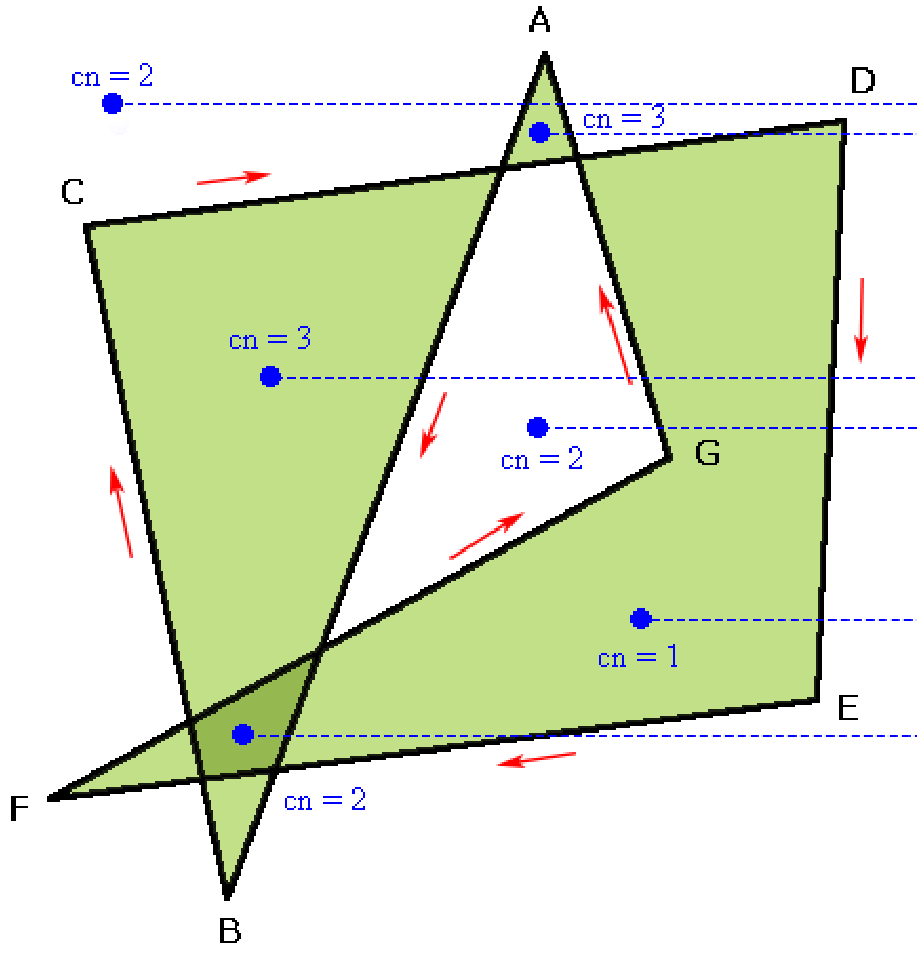
CROSSING NUMBER ALGORITMUS

Szabályok:

- Minden pontból húzzunk egy félegyenest, tetszőleges irányba.
- Minden oldalél metszéspont
$$cn := cn + 1$$
- A pont a poligon belül van ⇒ cn páratlan
- A pont a poligon kívül van ⇒ cn páros

Problémák:

- Külön figyelmet kell fordítani a csúcsban metszésre.
- Téves eredményt ad a saját magát metsző poligonokra.



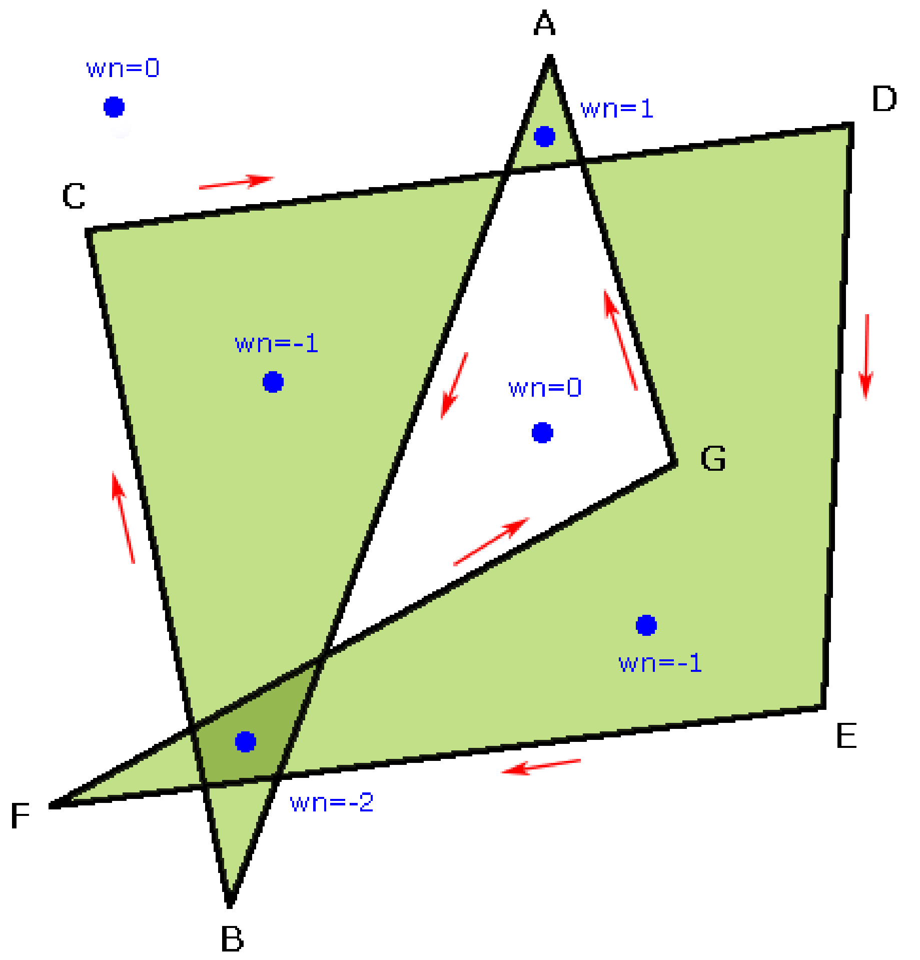
WINDING NUMBER ALGORITMUS

Szabályok:

- Felfelé keresztező él,
  óramutató szerinti ellentétes bejárással:
  $$wn := wn + 1$$
- Lefele keresztező él,
  óramutató szerinti bejárással:
  $$wn := wn - 1$$
- A pont a poligon kívül van $\Leftrightarrow \mathrm{wn} = 0$

Algoritmikus komplexitás: $\theta(2n)$

- n: élek száma



BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

Event: 0

- EQ: S_1, S_2, S_3, S_4, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: ∅

Event: 1 (S_1)

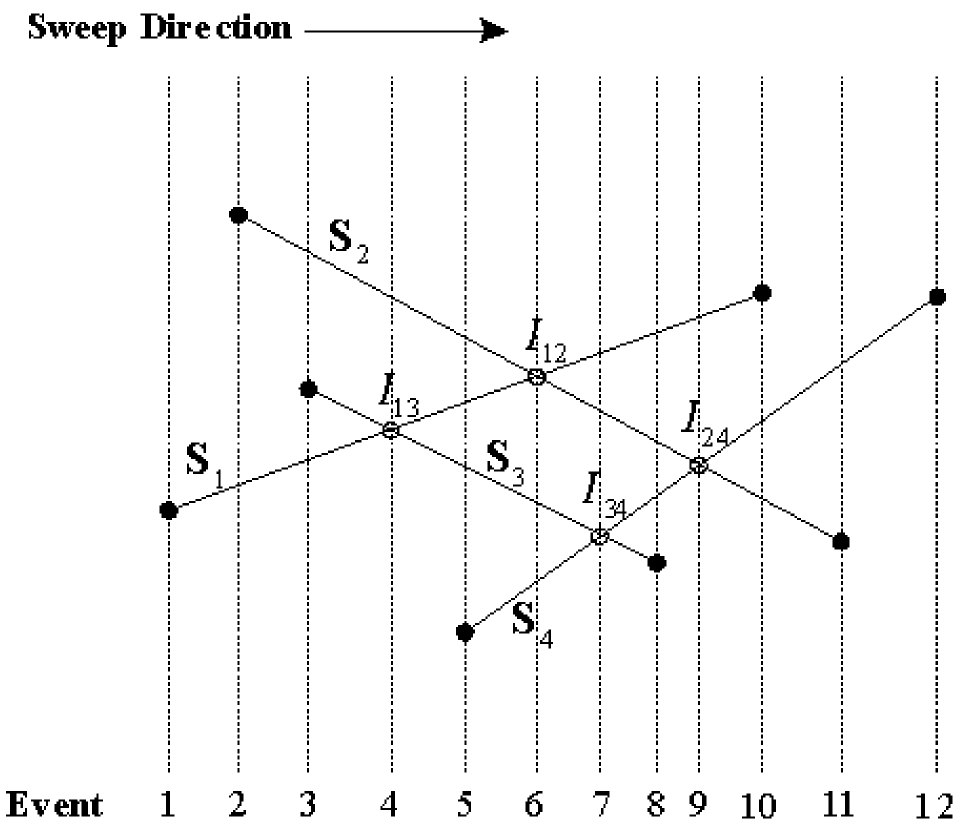
- EQ: S_2, S_3, S_4, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S1

Event: 2 (S_2)

- EQ: S_3, S_4, I_{12}, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S_1, S_2

Event: 3 (S_3)

- EQ: I_{13}, S_4 , I_{12}, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S_1, S_3, S_2



Forrás: geomalgorithms.com

BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

Event: 4 (I_{13})

- EQ: S_4 , I_{12}, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S_3, S_1, S_2

Event: 5 (S_4)

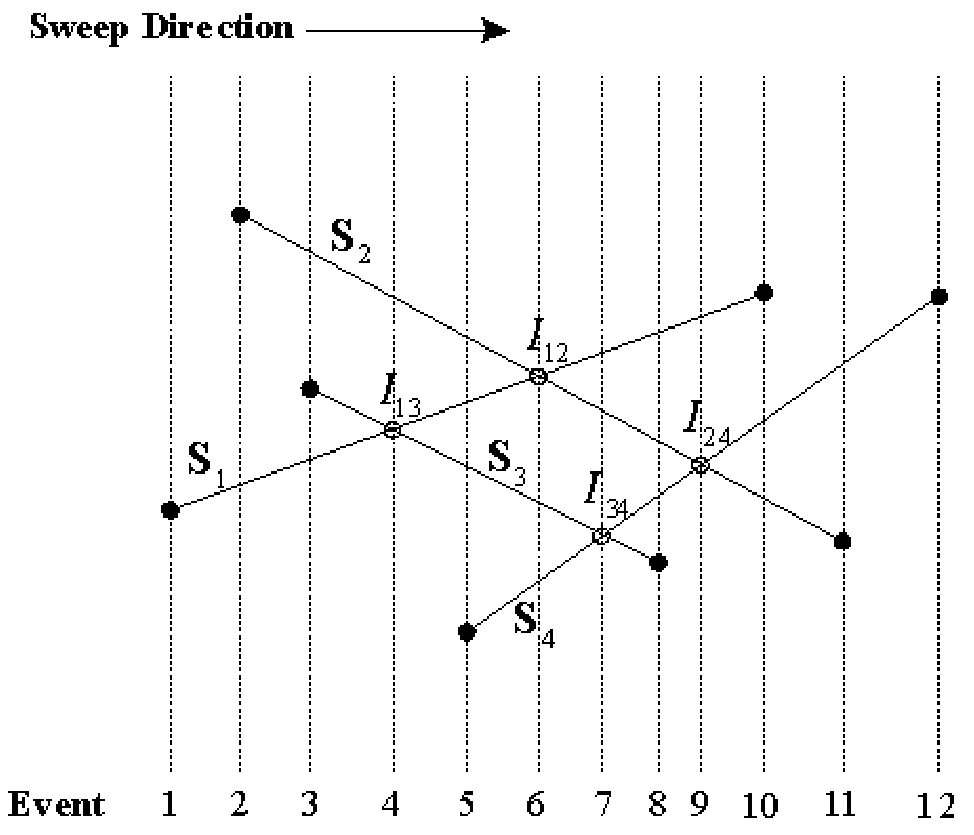
- EQ: I_{12}, I_{34}, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S_4, S_3, S_1, S_2

Event: 6 (I_{12})

- EQ: I_{34}, S_3, S_1, S_2, S_4
- SL: S_4, S_3, S_2, S_1

Event: 7 (I_{34})

- EQ: S_3, I_{24}, S_1, S_2, S_4
- SL: S_3, S_4, S_2, S_1



Forrás: geomalgorithms.com

BENTLEY-OTTMANN ALGORITMUS

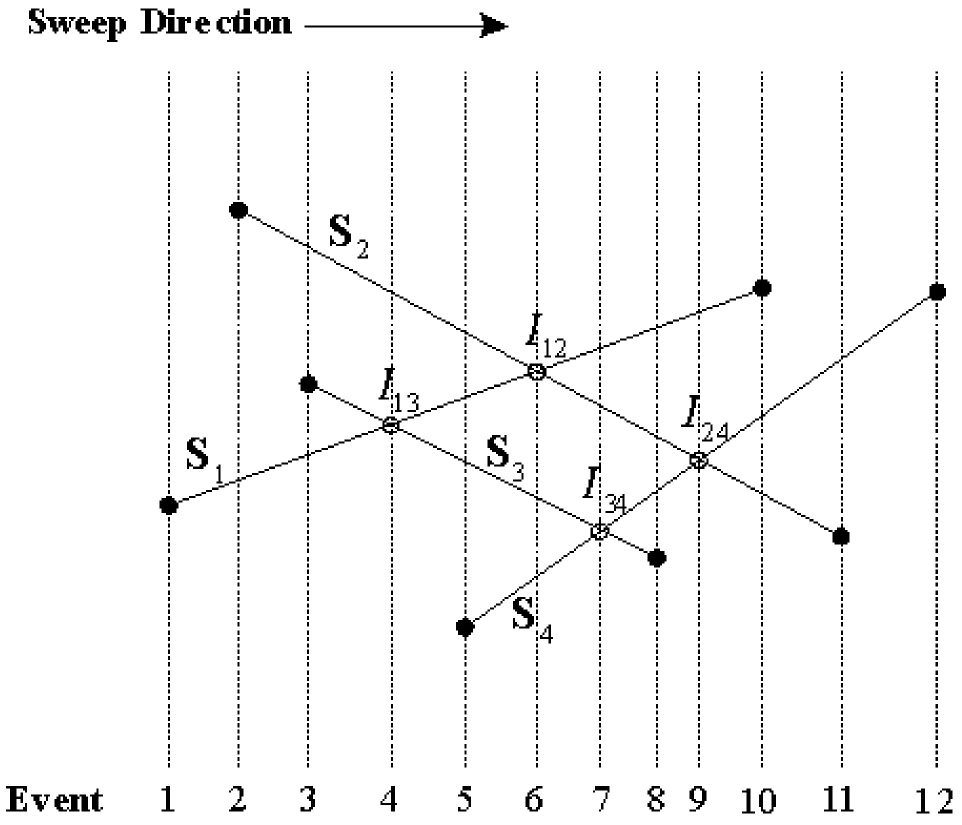
Event: 8 (S_3)
- EQ: I_{24}, S_1, S_2, S_4
- SL: S_4, S_2, S_1

Event: 9 (I_{24})
- EQ: S_1, S_2, S_4
- SL: S_2, S_4, S_1

Event: 10 (S_1)
- EQ: S_2, S_4
- SL: S_2, S_4

Event: 11 (S_2)
- EQ: S_4
- SL: S_4

Algoritmikus komplexitás: $\theta\big((n+k)\log n\big)$
- n: élszegmensek száma
- k: metszéspontok száma



Forrás: geomalgorithms.com

GREINER-HORMANN ALGORITMUS

Csúcslisták:

- P: $P_0, I_1, I_0, P_1, I_2, I_3, P_2, I_4, P_3, I_5, P_4$
- Q: $Q_0, Q_1, I_0, I_2, Q_2, Q_3, I_5, I_4, I_3, I_1$

Belépési pontok: I_1, I_2, I_4

Feldolgozási szabály:

1. Belépési ponttól elindulunk P listán.
2. Metszéspontnál listát váltunk.
3. A kiindulási ponthoz visszaérkezéskor megkaptunk egy metszet poligont.
4. Töröljük az érintett metszéspontokat a belépési pontok közül; újrakezdjük a feldolgozást.

Speciális esetek:

- Több egymást követő belépési (ill. kilépési) pont
- Belépési/kilépési pontok (érintés)