EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM - INFORMATIKAI KAR

Diszkrét matematika I.

Vizsgaanyag

Cserép Máté

2009.01.20.

A dokumentum a programtervező informatikus szak „Diszkrét matematika I.” kurzusának vizsgaanyagát tartalmazza: definíciók, tételek, egyszerű példák és ellenpéldák, bizonyítások, stb.

I. rész: Tételek

1) Mi lehet a predikátumok értéke? Hogyan jelöljük?
Értékük lehet igaz (jele: ↑) vagy hamis (jele: ↓).

2) Mondjon legalább 3 példát predikátumra.
$P(x)$: *x* pont.
$E(x)$: *x* egyenes.
$I(x, y)$: *x* illeszkedik *y*-ra.

3) Sorolja fel a logikai jeleket.
¬: negáció (tagadás)
∧: konjunkció (és)
∨: diszjunkció (vagy)
⇒: implikáció (ha… akkor…)
⇔: ekvivalencia (akkor és csak akkor)
⊕: antivalencia (kizáró vagy)
|: konnegáció (sem… sem… $[\mathcal{A} \mid \mathcal{B} = \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})]$)
‖: exklúzió (összeférhetetlen vagy: $[\mathcal{A} \parallel \mathcal{B} = \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})]$)

4) Milyen kvantorokat ismer? Mi a jelük?
∀: univerzális kvantor (minden).
∃: egzisztenciális kvantor (létezik).

5) Hogyan kapjuk a logikai formulákat?
A logikai formulák az adott elmélet predikátumaiból épülnek fel a logikai jelek valamint a kvantorok segítségével.

6) Mikor van egy változó egy kvantor hatáskörében?
Egy formula egy ($\forall x \mathcal{A}$) vagy ($\exists x \mathcal{A}$) típusú részformulája esetén az *x* változó minden, a két zárójel közötti előfordulása (a kvantor után vagy $\mathcal{A}$-ban) a kvantor hatáskörében van. Ha egy változó összes előfordulása egy kvantor hatáskörében van, akkor a változó is.

7) Mik a nyitott és mik a zárt formulák?
Ha egy formulának nincs szabad változója, akkor zárt formula, egyébként nyitott formula.

8) Mondjon két példát nyitott formulára.
$$\mathcal{A}(x, y) := \Big(\big(P(x) \wedge P(y)\big) \wedge \neg x = y\Big)$$
$$\mathcal{B}(x) := \exists y \Big(\big(E(x) \wedge P(y)\big) \wedge I(x, y)\Big)$$

9) Mondjon egy példát zárt formulára.
$$\mathcal{C}() := \forall x \Big(E(x) \Rightarrow \exists y\big(P(y) \wedge I(x, y)\big)\Big)$$

10) Milyen predikátumok szerepelnek a halmazelméletben?
A halmazelméletben (az egyenlőségen kívül) a „halmaznak lenni” (nincs jele) és az „eleme” (jele: ∈) predikátum szerepel.

11) Fogalmazza meg a meghatározottság elvét.

Az *A* és *B* halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.

Formálisan: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

12) Definiálja a részhalmaz és a valódi részhalmaz fogalmát és adja meg jelöléseiket.

Az *A* halmaz részhalmaza *B* halmaznak, ha *A* minden eleme a *B* halmaznak is eleme (jele: $A \subset B$). Ha *A* részhalmaza *B*-nek, de nem egyenlő vele, akkor *A* valódi részhalmaza *B*-nek (jele: $A \subsetneq B$).

Formálisan: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A(x \in B)$

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow \big(\forall x \in A(\, x \in B)\big) \land\ A \neq B$$

13) Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a „részhalmaz" fogalom?

Reflexivitás: $A \subset A$

Tranzitivitás: $A \subset B \land\ B \subset C\ \Rightarrow A \subset C$

Antiszimmetria: $A \subset B \land\ B \subset A\ \Rightarrow A = B$ (a meghatározottsági axióma szerint).

14) Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a halmazok egyenlősége?

Reflexivitás: $A = A$

Tranzitivitás: $A = B \land\ B = C\ \Rightarrow A = C$

Antiszimmetria: $A = B \land\ B = A\ \Rightarrow A = B$

Szimmetria: $A = B \Rightarrow B = A$

15) Írja le a részhalmaz fogalmát. Milyen jelölést használunk a részhalmazok megadására?

Az *A* halmaz részhalmaza *B* halmaznak, ha *A* minden eleme a *B* halmaznak is eleme (jele: $A \subset B$).

16) Írja le az üres halmaz fogalmát.

Az üres halmaz az a halmaz, amelynek nincsen eleme (jele: Ø).

17) Igaz-e, hogy csak egy üres halmaz van?

Igen, mert amennyiben több üres halmaz lenne, azok a meghatározottsági axióma szerint ekvivalensek lennének.

18) Írja le a pár fogalmát. Milyen jelölés kapcsolódik hozzá?

Bármely *a* és *b* dologhoz létezik olyan halmaz, amelynek ezek és csak ezek az elemei. Ezt nevezzük párnak. (Páraxióma.) Jelölése: $\{a, b\}$.

19) Írja le két halmaz unióját és a megfelelő jelöléseket.

Az *A* és *B* halmaz uniója az a halmaz, amelynek pontosan azok a dolgok az elemei, melyek elemei *A*-nak vagy *B*-nek (vagy mindkettőnek). Jele: $A \cup B$.

20) Írja le halmazrendszer unióját és a megfelelő jelöléseket.

Egy halmazrendszer uniója az a halmaz, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek a halmazrendszer legalább egy elemének elemei. (Unióaxióma.) Jelölései:

- $\cup\, \mathcal{A}$
- $\cup \{A : A \in \mathcal{A}\}$
- $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$

Formalizálva: $\cup\, \mathcal{A}\ :=\ \{x : \exists A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$

21) Fogalmazza meg a halmazok uniónak alaptulajdonságait.

$A \cup \emptyset = A$
Kommutativitás: $A \cup B = B \cup A$
Asszociativitás: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotencia: $A \cup A = A$
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

22) Definiálja halmazrendszer és két halmaz metszetét, és adja meg a jelöléseket.

Egy halmazrendszer metszete az a halmaz, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek a halmazrendszer minden elemének elemei. Jelölései:

- $\cap \mathcal{A}$
- $\cap \{A: A \in \mathcal{A}\}$
- $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$

Formalizálva: $\cap \mathcal{A} := \{x: \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$
$\cap \mathcal{A} := \{x \in \cup \mathcal{A}: \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$

Az *A* és *B* halmaz metszete az a halmaz, amelynek pontosan azok a dolgok az elemei, melyek elemei *A*-nak és *B*-nek is. Jele: $A \cap B$.

23) Definiálja a diszjunktság és páronként diszjunktság fogalmát.

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B halmazok diszjunktak. Ha egy halmazrendszer bármely két halmaza diszjunkt, akkor a halmazrendszer elemei páronként diszjunktak.

24) Fogalmazza meg a halmazok metszetének alaptulajdonságait.

$A \cap \emptyset = \emptyset$
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$
Asszociativitás: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotencia: $A \cap A = A$
$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

25) Fogalmazza meg az unió és a metszet disztributivitását.

Az unió és a metszet műveletek kölcsönösen disztributívak egymásra nézve.
A metszet disztributivitása az unióra nézve: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Az unió disztributivitása a metszetre nézve: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

26) Definiálja halmazok különbségét, szimmetrikus differenciáját és komplementerét.

Különbség: $A \setminus B := \{x \in A: x \notin B\}$
Szimmetrikus differencia: $A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Komplementer: $C_x A := X \setminus A$ (jelöljük még A'-vel és $\bar{A}$-sal is.)

27) Fogalmazza meg a halmazok komplementerének alaptulajdonságait.

$(A')' = A$
$\emptyset' = X$
$X' = \emptyset$
$A \cap A' = \emptyset$
$A \cup A' = X$
$A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

28) Írja le a hatványhalmaz fogalmát. Milyen jelölések kapcsolódnak hozzá?

Minden *A* halmazhoz létezik egy olyan halmazrendszer, amelynek elemei pontosan *A* részhalmazai. (Hatványhalmaz-axióma.) Jele: $\wp(A)$ illetve 2^A.

29) Definiálja a rendezett pár fogalmát és koordinátáit.

Rendezett pár alatt az (a, b) szimbólumot értjük, ahol $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$. A rendezett pár fogalmát ennek megfelelően halmazként definiálhatjuk: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Az (a, b) rendezett pár első koordinátája *a*, második koordinátája *b*.

30) Definiálja két halmaz Descartes-szorzatát.

Az *X* és *Y* halmazok Descartes-szorzatának (jele: $\times$) jelentése formálisan:

$X \times Y := \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$

$X \times Y := \{(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y)): x \in X, y \in Y\}$

31) Definiálja a binér reláció fogalmát és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az *R* halmaz binér reláció, ha minden eleme rendezett pár. Ha $(x, y) \in R$, akkor azt xRy-ként is jelölhetjük, melynek jelentése: *x* és *y* között fennáll *R* reláció.

32) Mit jelent az, hogy *R* reláció *X* és *Y* között? Mit jelent az, hogy *R* egy *X*-beli reláció?

Ha *X* és *Y* halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor *R* egy *X* és *Y* közötti binér reláció. Ha $X = Y$, akkor *R* egy *X*-beli binér reláció, más néven homogén binér reláció.

33) Definiálja a binér reláció értelmezési tartományát és értékkészletét, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az *R* binér reláció értelmezési tartománya az elemeinek első koordinátáiból álló halmaz. Jele: $dmn(R)$.
Az *R* binér reláció értékkészlete az elemeinek második koordinátáiból álló halmaz. Jele: $rng(R)$.
Formálisan: $dmn(R) := \{x: \exists y((x, y) \in R)\}$

$rng(R) := \{y: \exists x((x, y) \in R)\}$

34) Definiálja a binér reláció kiterjesztését, leszűkítését és leszűkítését egy halmazra és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az *R* binér relációt az *S* binér reláció kiterjesztésének, illetve *S*-et *R* leszűkítésének nevezzük, ha $S \subset R$.
Ha *X* egy halmaz, akkor *R* binér reláció *X*-re való leszűkítésén azt a relációt értjük, melynek alaphalmaza *R* és értelmezési tartománya *X* részhalmaza. (Jele: $R|_X$.)
Formálisan: $R|_X := \{(x, y) \in R: x \in X\}$

35) Definiálja egy binér reláció inverzét és sorolja fel az inverz három egyszerű tulajdonságát.

Egy binér reláció inverzét elemeinek két koordinátájának megcserélésével kapjuk (jele: R^{-1}).
Formálisan: $R^{-1} := \{(b, a): (a, b) \in R\}$
Az inverz három egyszerű tulajdonsága:

- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subset X \times Y \Leftrightarrow R^{-1} \subset Y \times X$
- $dmn(R^{-1}) = rng(R)$ és $rng(R^{-1}) = dmn(R)$

36) Definiálja halmaz képét és inverz képét binér relációnál és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az *A* halmaz képe *R* binér relációnál az halmaz, melynek elemei *R* azon elemeinek második koordinátája, amelyek első koordinátája *A* eleme (jele: $R(A)$).
Formálisan: $R(A) := \{y: \exists x \in A((x, y) \in R)\}$
Az *A* halmaz inverz képe *R* binér relációnál *A* képe R^{-1} relációnál (jele: $R^{-1}(A)$).

37) Definiálja a binér relációk kompozícióját. Lehet-e a kompozíció üres?

Az R és S binér reláció kompozíciójának (jele: ∘) jelentése formálisan:

$R \circ S := \{(x, y) : \exists z((x, z) \in S \land (z, y) \in R)\}$

Az $R \circ S$ binér reláció üres akkor és csak akkor, ha $rng(S)$ és $dmn(R)$ halmazok diszjunktak.

Formalizálva: $R \circ S = \emptyset \Leftrightarrow rng(S) \cap dmn(R) = \emptyset$

38) Fogalmazzon meg három, binér relációk kompozíciójára vonatkozó állítást.

$rng(S) \supset dmn(R) \Rightarrow rng(R \circ S) = rng(R)$

Asszociativitás: $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

39) Mit jelent az, hogy egy reláció tranzitív, szimmetrikus és dichotóm? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Az *R* legyen egy *X* halmazbeli binér reláció. Ekkor *R*:

Tranzitív: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \land (y, z) \in R) : (x, z) \in R$

Szimmetrikus: $\forall x \forall y((x, y) \in R) : (y, x) \in R$

Dichotóm: $\forall x \in X\ \forall y \in X : (x, y) \in R \lor (y, x) \in R$

Ezek közül a tranzitivitás és a szimmetria csak a reláción múlik.

40) Mit jelent az, hogy egy reláció intranzitív, antiszimmetrikus és trichotóm? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Az *R* legyen egy *X* halmazbeli binér reláció. Ekkor *R*:

Intranzitív: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in R \land (y, z) \in R) : (x, z) \notin R$

Antiszimmetrikus: $\forall x \forall y((x, y) \in R \land (x, y) \in R) : x = y$

Trichotóm: $\forall x \in X\ \forall y \in X : x = y \oplus (x, y) \in R \oplus (y, x) \in R$

Ezek közül az intranzitivitás és az antiszimmetria csak a reláción múlik.

41) Mit jelent az, hogy egy reláció szigorúan antiszimmetrikus, reflexív illetve irreflexív? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Az *R* legyen egy *X* halmazbeli binér reláció. Ekkor *R*:

Szigorúan antiszimmetrikus: $\forall x \forall y((x, y) \in R) : (y, x) \notin R$

Reflexív: $\forall x \in X : (x, x) \in R$

Irreflexív: $\forall x \in X : (x, x) \notin R$

Ezek közül a szigorú antiszimmetria csak a reláción múlik.

42) Definiálja az ekvivalenciareláció, illetve az osztályozás fogalmát.

Egy *X* halmazbeli binér reláció ekvivalenciareláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az *X* részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszere *X* osztályozása, ha $\mathcal{O}$ páronként diszjunkt, nem üres halmazokból álló halmazrendszer, amelyre $\cup\, \mathcal{O} = X$.

43) Mi a kapcsolat az ekvivalenciarelációk és az osztályozások között?

Egy *X* halmazon értelmezett ekivalenciareláció *X*-nek egy osztályfelbontását adja. Megfordítva, *X* minden osztályfelbontása egy ekvivalenciarelációt hoz létre.

44) Definiálja a részbenrendezés és a részbenrendezett halmaz fogalmát. Mit mondhatunk egy részbenrendezett halmaz egy részhalmazáról?

Egy *X* halmazbeli binér reláció részbenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ekkor *X* halmaz részbenrendezett. Ha $x, y \in X: x \leq y \lor y \leq x$, akkor *x* és *y* elemek összehasonlíthatóak. Egy részbenrendezett halmaz minden részhalmaza is részbenrendezett, ha a $\leq$ relációt csak ennek elemei között tekintjük.

45) Definiálja a rendezés, a rendezett halmaz, illetve a lánc fogalmát.

A rendezett *X* halmaz olyan részbenrendezett halmaz, amely dichotóm, azaz bármely két eleme összehasonlítható. Tehát egy *X* halmazbeli binér reláció rendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotóm. Láncnak nevezzük egy részbenrendezett halmaz részhalmazát, amely rendezett, ha a $\leq$ relációt csak annak elemei között tekintjük.

46) Mondjon egy példát részbenrendezett, de nem rendezett halmazra.

A természetes számok körében az $n|m$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés.
Formálisan: $\leq := \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: n|m\}$

47) Definiálja egy relációnak megfelelő szigorú illetve gyenge reláció fogalmát.

Szigorú reláció: egy *X* halmazbeli *R* relációhoz definiálhatjuk a szintén *X* halmazbeli *S* relációt úgy, hogy $xSy \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$.
Gyenge reláció: egy *X* halmazbeli *R* relációhoz definiálhatjuk a szintén *X* halmazbeli T relációt úgy, hogy $xTy \Leftrightarrow xRy \vee x = y$.
Formalizálva: $R \supset S := \{(x,y) \in R: x \neq y\}$
$R \subset T := \{(x,y) \in X \times X: (x,y) \in R \vee x = y\}$

48) Definiálja a szigorú részbenrendezést és fogalmazza meg kapcsolatát a részbenrendezéssel.

Szigorú részberendezés az a részberendezés, amelyet szigorúan rendezünk; ez tranzitív, irreflexív és szigorúan antiszimmetrikus (jele: $<$). Ha egy részbenrendezett relációt szigorúan, majd gyengén rendezünk, akkor a kiindulási részbenrendezést kapjuk vissza.

49) Mi az, hogy kisebb, nagyobb, megelőzi, követi? Adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha egy szigorú relációban $x < y$, akkor *x* kisebb, mint *y*, másképpen *y* nagyobb, mint *x*. Úgy is fogalmazhatunk, hogy *x* megelőzi *y*-t, illetve *y* követi *x*-et. (Egy gyenge reláció esetén hozzátesszük, hogy „vagy egyenlő”.)

50) Definiálja az intervallumokat és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha *X* egy részbenrendezett halmaz, akkor ha $x \leq z \wedge z \leq y$, akkor *z* az *x* és *y* közé esik, ha pedig $x < z \wedge z < y$, akkor *z* szigorúan az *x* és *y* közé esik. Az összes ilyen *z* elemek halmazát $[x,y]$, illetve $]x,y[$ jelöli és intervallumoknak nevezzük őket. Az utóbbit (x,y)-nal is szokás jelölni. A $[x,y[$ és $]x,y]$ halmazok definíciója analóg, itt is használatos a kerek zárójeles változat.

51) Mi az, hogy közvetlenül követi illetve közvetlenül megelőzi?

Ha egy intervallumban $x < y$ és nem létezik szigorúan *x* és *y* közé eső elem, akkor *x* közvetlenül megelőzi *y*-t, másképpen *y* közvetlenül követi *x*-et.

52) Definiálja a kezdőszelet fogalmát és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha egy intervallumot egy *X* halmaz tetszőlegesen választott *x* eleméhez úgy választunk meg, hogy $I := \{y \in X: y < x\}$, akkor ez az intervallum az *x* elemhez tartozó kezdőszelet. Jelölése $]\longleftarrow, x[$; analóg módon értelmezzük a $]\longleftarrow, x]$, $]x, \longrightarrow[$ és $[x, \longrightarrow[$ jelöléseket.

53) Definiálja a legkisebb és legnagyobb elem fogalmát.

Az *X* részbenrendezett halmazban *x* a legkisebb elem, ha $\forall y \in X: x \leq y$ teljesül. Hasonlóan *x* a legnagyobb elem, ha $\forall y \in X: x \geq y$ teljesül. Nem biztos, hogy van legkisebb illetve legnagyobb elem, de ha van, akkor egyértelmű - ha több is lenne, akkor azok az antiszimmetria miatt megegyeznének.

54) Definiálja a minimális és maximális elem fogalmát és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az *X* részbenrendezett halmazban *x* minimális elem, ha $\nexists y \in X: y < x$ teljesül. Hasonlóan *x* maximális elem, ha $\nexists y \in X: y > x$ teljesül. Minimális és maximális elemekből több is lehet, de az is lehet, hogy egy sincs. Amennyiben *X*-nek létezik egyértelmű minimális eleme, akkor azt $\min X$-szel, ha pedig létezik egyértelmű maximális eleme, azt $\max X$-szel jelöljük.

55) Adjon meg olyan részbenrendezett halmazt, amelyben több minimális elem van.

Az $N := \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ halmazon $\forall n, m \in N$-re a $n \leq m: n|m$ reláció részbenrendezés, melyben minden prímszám minimális elem.
Formálisan: $\leq := \{(n, m) \in N \times N: n|m\}$

56) Adjon meg olyan részbenrendezett halmazt, amelyben nincs maximális elem.

A természetes számok halmaza a szokásos rendezéssel.

57) Igaz-e, hogy rendezett halmazban a legkisebb és minimális elem fogalma egybeesik?

Igen, mert ha *X* rendezett halmazban *x* elemre $\forall y \in X: x \leq y$ teljesül, akkor $\nexists y \in X: y < x$ is, mivel az $x \leq y$ és az $y < x$ nem teljesülhet egyszerre. Fordítva, ha *x* minimális, akkor $\nexists y \in X: y < x$ teljesül, ezáltal $\forall y \in X: x \leq y$ is, mert a két állítás egymással ekvivalens, ha bármely két elem összehasonlítható. Ezáltal a legkisebb és csak a legkisebb elem minimális.

58) Definiálja az alsó és felső korlát fogalmát.

Ha *X* egy részbenrendezett halmaz *x* eleme *Y* részhalmaz minden eleménél kisebb vagy egyenlő, akkor az *x* az *Y* részhalmaz alsó korlátja. Hasonlóan, ha az *x* elem *Y* minden eleménél nagyobb vagy egyenlő, akkor az *x* az *Y* részhalmaz felső korlátja. Ekkor *Y* alulról, illetve felülről korlátos. Lehet, hogy egy részhalmaznak nincs alsó vagy felső korlátja, de az is lehet, hogy több van.
Formálisan: $x \in X, Y \subset X, \forall y \in Y: x \leq y$
$x \in X, Y \subset X, \forall y \in Y: x \geq y$

59) Igaz-e, hogy ha egy részbenrendezett halmaz egy részhalmaza tartalmaz a részhalmaz alsó korlátjai közül elemeket, akkor csak egyet?

Igen. Indirekt bizonyítás: tartalmazza *X* részbenrendezett halmaz *Y* részhalmaza *x* és *y* elemeket, ezek legyenek a részhalmaz alsó korlátjai. Az alsó korlát fogalmának definíciója miatt ekkor $x \leq y$ és $y \leq x$ egyaránt teljesül. Ekkor viszont a részbenrendezés antiszimmetriája miatt $x = y$. ↯ Ezzel ellentmondásra jutottunk, az a kérdésben megfogalmazott állítás igaz.

60) Igaz-e, hogy ha egy részbenrendezett halmaz egy részhalmaza tartalmazza a részhalmaz egy alsó korlátját, akkor az a részhalmaznak minimális eleme?

Igen, mert ekkor az alsó korlát fogalmának definíciója miatt *X* halmaz *Y* részhalmazának *x* elemére és egyben alsó korlátjára teljesül a $\forall y \in X: x \leq y$, amely a legkisebb elem definíciójával egyezik meg. Mivel *x* az *Y* összes elemével összehasonlítható - mert alsó korlát -, ezért $\forall y \in X: x \leq y = \neg\big(\neg(\forall y \in X: x \leq y)\big) = \neg(\exists y \in X: y < x) = \nexists y \in X: y < x$, ami a minimális elem definíciója, tehát *x* az *Y* részhalmaz minimális eleme is.

61) Definiálja az infimum és a szuprémum fogalmát.

Amennyiben X halmaz Y részhalmaza alulról korlátos, akkor az alsó korlátok halmazában a legnagyobb elem az infimum, más néven alsó határ (jele: $\inf Y$). Hasonlóan, ha Y felülről korlátos, akkor a felső korlátok halmazában a legkisebb elem a szuprémum, más néven felső határ (jele: $\sup Y$).

62) Definiálja a jólrendezés és a jólrendezett halmaz fogalmát.

Az X részbenrendezett halmaz jólrendezett, részbenrendezése pedig jólrendezés, ha X bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

63) Adjon meg olyan rendezett halmazt, amely nem jólrendezett.

Az egész számok halmaza a szokásos rendezéssel.

64) Van-e olyan jólrendezett halmaz, amely nem rendezett?

Nincs. Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy X jólrendezett halmaz nem rendezett. Ekkor X nem dichotóm, azaz van legalább 2 eleme, amelyek nem összehasonlíthatóak egymással. Vegyük X-nek egy olyan részhalmazát, amelynek 2 eleme van és ezek egymással nem állnak relációban. Ennek a részhalmaznak nincsen legkisebb eleme, hiszen a 2 elem egymással nem összehasonlítható. Ekkor viszont X nem jólrendezett, tehát ellentmondásra jutottunk. ↯

65) Adjon példát jólrendezett halmazra.

A természetes számok halmaza a szokásos rendezéssel.

66) Adjon meg két részbenrendezett halmaz Descartes-szorzatán a halmazok részbenrendezései segítségével két részbenrendezést.

Az X és Y részbenrendezett halmazok Descartes-szorzatán értelmezzük az alábbi részbenrendezéseket:

$R_1 := \{((x,y) \in X \times Y, (x',y') \in X \times Y): x \leq x' \wedge y \leq y'\}$

$R_2 := \{((x,y) \in X \times Y, (x',y') \in X \times Y): x \leq x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')\}$

67) Definiálja a függvény fogalmát. Ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

A függvény egy olyan f reláció, amelynél minden x-hez legfeljebb egy olyan y létezik, amelyre $(x,y) \in f$. Az f függvény x helyen felvett y értékét szokás $f(x) = y$-ként illetve f_x-szel is jelölni. A függvény hozzárendelési szabályát az $f: x \mapsto y$ formulával szokás felírni, ahol a függvény jelölését olykor elhagyják és egyszerűen $x \mapsto y$-t írnak.

Formálisan: $\forall (x,y) \in f: \nexists y'((x,y') \in f \wedge y' \neq y) \Rightarrow f$ függvény.

68) Mi a különbség a között, hogy $f \in X \longrightarrow Y$ és hogy $f: X \longrightarrow Y$?

Az $f \in X \longrightarrow Y$ esetén $dmn(f) \subset X$, míg a $f: X \longrightarrow Y$ estében $dmn(f) = X$.

69) Mikor nevezünk egy függvényt kölcsönösen egyértelműnek?

Egy függvény kölcsönösen egyértelmű - más néven injektív -, ha minden felvett értékéhez az értékkészlet csak egyetlen eleme tartozik. Ez azzal ekvivalens, hogy f^{-1} reláció függvény.

Formálisan: $\forall x \in dmn(f): \nexists x' \in dmn(f)(f(x) = f(x') \wedge x \neq x')$.

70) Igaz-e, hogy az identikus leképezés mindig szürjektív?

Igen, az identikus leképezés definíciójából ($\mathbb{I}_X := \{(x,x) \in X \times X: x \in X\}$) következik, hogy $dmn(\mathbb{I}_X) = X$ és $rng(\mathbb{I}_X) = X$, így a függvény szürjektív.

71) Igaz-e, hogy két függvény összetétele mindig függvény?

Igen. Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy $(x,z) \in f \circ g \wedge (x,z') \in f \circ g \wedge z \neq z'$ igaz. Mivel g függvény, ezért ha $(x,y) \in g \wedge (x,y') \in g$, akkor $y = y'$. Hasonlóan, mivel f is függvény, ha $(y,z) \in g \wedge (y,z') \in g$, akkor $z = z'$. ↯ Ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz a kérdésben megfogalmazott állítás igaz.

72) Mikor állíthatjuk, hogy két függvény összetétele injektív, szürjektív illetve bijektív?

Ha a két függvény injektív, szürjektív illetve bijektív, akkor és csak akkor lesz a két függvény összetétele is injektív, szürjektív valamint bijektív.

73) Mi a kapcsolat függvények és ekvivalenciarelációk között?

Ha az X halmazon adott egy ekvivalenciareláció, akkor az x elemhez az ekvivalenciaosztályát rendelő leképezést kanonikus leképezésnek nevezzük. Megfordítva, ha $f: X \longrightarrow Y$ egy függvény, akkor az $x \sim x'$, ha $f(x) = f(x')$ reláció egy ekvivalenciareláció.

74) Mikor nevezünk egy függvényt monoton növekedőnek illetve monoton csökkenőnek?

Az $f: X \longrightarrow Y$ függvény monoton növekedő, ha $\forall x \in X(\forall y \in X, x \leq y): f(x) \leq f(y)$ teljesül. Monoton csökkenő, ha $\forall x \in X(\forall y \in X, x \leq y): f(x) \geq f(y)$ teljesül.

75) Mikor nevezünk egy függvényt szigorúan monoton növekedőnek illetve szigorúan monoton csökkenőnek?

Az $f: X \longrightarrow Y$ függvény szigorúan monoton növekedő, ha $\forall x \in X(\forall y \in X, x < y): f(x) < f(y)$ teljesül. Szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall x \in X(\forall y \in X, x < y): f(x) > f(y)$ teljesül.

76) Mi a kapcsolat a szigorúan monoton növekedő függvények, a kölcsönösen egyértelmű függvények és az inverz függvények között?

Ha *X* és *Y* rendezett halmazokon értelmezett $f: X \longrightarrow Y$ függvény szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő), akkor *f* kölcsönösen egyértelmű is. Megfordítva, ha *X* és *Y* rendezettek, $f: X \longrightarrow Y$ függvény injektív és monoton növekedő (illetve csökkenő), akkor f szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő). Ha pedig az X és Y rendezett halmazokon értelmezett $f: X \longrightarrow Y$ függvény szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő), akkor az injektivitása miatt inverze (f^{-1}) is szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) lesz.

77) Mit értünk indexhalmaz, indexezett halmaz és család alatt?

Egy függvény értékkészletét nevezhetjük indexhalmaznak (jele: *I*), értékkészletét indexezett (vagy indexelt) halmaznak, magát a függvényt pedig (indexelt) családnak.

78) Definiálja a halmazcsaládok unióját és metszetét.

Egy (indexelt) halmazcsalád uniója az a (indexelt) család, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek a halmazcsalád indexelt halmazrendszerének legalább egy elemének elemei.

Egy (indexelt) halmazcsalád metszete az a (indexelt) család, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek a halmazcsalád indexelt halmazrendszerének minden elemének elemei.

Formálisan: $\cup_{i \in I} X_i := \cup \{X_i : i \in I\}$, olykor csak $\cup_i X_i$-ként jelölve.

$\cap_{i \in I} X_i := \cap \{X_i : i \in I\}$, ha $I \neq \emptyset$, olykor csak $\cap_i X_i$-ként jelölve.

79) Fogalmazza meg a halmazcsaládokra vonatkozó De Morgan-szabályokat.

Ha X_i, $i \in I$, az *X* halmaz részhalmazainak egy nem üres családja (azaz $I \neq \emptyset$), akkor az *X*-re vonatkozó komplementert vesszővel jelölve a De Morgan-szabályok formálisan:

$(\cup_{i \in I} X_i)' = \cap_{i \in I} X_i'$

$(\cap_{i \in I} X_i)' = \cup_{i \in I} X_i'$

80) Fogalmazza meg a halmazműveletek és egy függvény kapcsolatáról tanult állításokat.

Legyen $f: X \longrightarrow Y$ egy függvény, *B* egy halmazcsalád, $B_i \subset Y$, ha $i \in I \neq \emptyset$. Ekkor:

- $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$
- $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$
- $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

81) Definiálja véges sok halmaz Descartes-szorzatát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Véges, sok, *n* darab halmaz Descartes-szorzatát formálisan így definiálhatjuk:

$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}$

Ha $X_1 = X_2 = \cdots = X_n := X$, akkor $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ helyett egyszerűen X^n-t szokás írni.

82) Definiálja a (nem feltétlenül binér) reláció fogalmát és a kapcsolódó jelöléseket.

Az *R* halmaz *n*-változós reláció, ha minden eleme rendezett *n*-es elemekből épül fel.

83) Definiálja a kiválasztási függvény fogalmát.

Az X_i, $i \in I$ halmazcsaládhoz tartozó kiválasztási függvények azok az $x: I \longrightarrow \cup_{i \in I} X_i$ függvények, amelyekre $\forall i \in I: x_i \in X_i$ teljesül.

84) Definiálja tetszőleges halmazcsalád Descartes-szorzatát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Az X_i, $i \in I$ halmazcsalád Descartes-szorzata a halmazcsaládhoz tartozó összes kiválasztási függvények halmaza, jelölése: $\times_{i \in I} X_i$. (Ha nem okoz félreértést, akkor $\times_i X_i$ is írható.)

85) Definiálja a projekció fogalmát.

Ha $J \subset I$, akkor az $x \longmapsto x|_J$ leképezést $\times_{i \in I} X_i$-nek $\times_{j \in J} X_j$-be való projekciójának nevezzük. Ha $J = \{j\}$, akkor ez az $x \longmapsto x_j$ leképezéssel azonosítható és j. projekciónak nevezzük.

86) Definiálja a binér, unér és nullér művelet fogalmát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Egy *X* halmazbeli binér műveleten egy $*: X \times X \longrightarrow X$ leképezést értünk. Ha $x, y, z \in X$, akkor $*(x, y) = z$ esetén *x* és *y* a művelet operandusai, *z* az eredménye. A binér művelet jelét rendszerint az operandusok közé írjuk, például: $x * y = z$. Ha $A, B \subset X$, akkor a $*(A \times B)$ értelmezése formálisan: $*(A \times B) := \{a * b: a \in A, b \in B\}$. Ezt rendszerint $A * B$-vel jelöljük.

Egy *X* halmazbeli unér műveleten egy $*: X \longrightarrow X$ leképezést értünk, ahol $*(x) = y$ esetén *x* a művelet operandusa, *y* az eredménye.

Egy *X* halmazbeli nullér műveleten (mivel $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$) egy $*: \{\emptyset\} \longrightarrow X$ leképezést értünk, amelynek operandusa nincs, csak eredménye. Egy nullér művelet tulajdonképpen *X* egy elemének kijelölését jelenti.

87) Hogyan definiálunk műveleteket függvénytereken?

Ha *X* és *Y* halmazok, * binér műveletet pedig *Y* halmaz elemei között értelmezzük, akkor az $f, g: X \longrightarrow Y$ függvények között is értelmezhetjük „pontonként” *’ binér műveletet az alábbi módon formálisan:

$\forall x \in X: (f *' g)(x) = f(x) * g(x)$

A két műveletet általában ugyanazzal a jellel szokás jelölni. Analóg módon definiálhatók unér illetve nullér műveletek is függvénytereken.

88) Definiálja a művelettartó leképezés fogalmát.

Legyenek * és *’ binér műveletek rendre *X* és *X’* halmazokon. Egy $\varphi: X \longrightarrow X'$ leképezés művelettartó, ha $\forall x, y \in X: \varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$ teljesül. Hasonló módon értelmezhető a művelettartás unér illetve nullér műveletekre is.

89) Fogalmazza meg a Peano-axiómákat.

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz és $^+$ egy $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Ekkor az alábbi feltételek a Peano-axiómák:

(1) $0 \in \mathbb{N}$
(2) $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N})$
(3) $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0)$
(4) $\forall n \forall m(n \in \mathbb{N} \land m \in \mathbb{N} \land n^+ = m^+ \Rightarrow n = m)$
(5) $\forall S\Big(\big(S \subseteq \mathbb{N} \land S \ni 0 \land (n \in S \Rightarrow n^+ \in S)\big) \Rightarrow S = \mathbb{N}\Big)$

Amennyiben ezek teljesülnek, akkor $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza.

90) Mi a rákövetkező, a rákövetkezés és a teljes indukció elve?

A $^+$ unér műveletet a rákövetkezés, az n^+ elem az *n* rákövetkezője. Az 5. Peano-axióma, a $\forall S\Big(\big(S \subseteq \mathbb{N} \land S \ni 0 \land (n \in S \Rightarrow n^+ \in S)\big) \Rightarrow S = \mathbb{N}\Big)$ a teljes indukció elve.

91) Definiálja a számjegyeket.

A számjegyek alapjelek, csakis önmagukat képviselik. A tízes számrendszerben a számjegyek a 0, 1 $:= 0^+, 2 := 1^+, 3 := 2^+, 4 := 3^+, 5 := 4^+, 6 := 5^+, 7 := 6^+,\quad 8 := 7^+, 1 := 0^+, 9 := 8^+$. (Ha további számjegyekre van szükségünk, akkor így folytathatjuk: $A := 9^+$, $B := A^+$, stb.)

92) Definiálja a sorozat fogalmát.

Ha $x: \mathbb{N} \longrightarrow X$, akkor $x_1, x_2, x_3, \ldots$ egy X-beli végtelen sorozat. (Az értelmezési tartomány olykor $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$.)

93) Fogalmazza meg a rekurziótételt.

Ha X egy halmaz, $a \in X$ és $f: X \longrightarrow X$ függvényre teljesülnek a Peano-axiómák, akkor csak egy és csak olyan $g: \mathbb{N} \longrightarrow X$ függvény létezik, amelyre $g(0) = a$ és $g(n^+) = f\big(g(n)\big)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Formalizálva: $\forall a \in X\ \forall f: X \longrightarrow X : \exists!\ g: \mathbb{N} \longrightarrow X \left(\forall n \in \mathbb{N} \left(g(0) = a \wedge g(n^+) = f\big(g(n)\big)\right)\right)$

94) Fogalmazza meg a természetes számok egyértelműségére vonatkozó tételt.

Ha $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}'$ eleget tesz a Peano-axiómának, akkor létezik olyan φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{N}'$-re, amelyre $\varphi(0) = 0'$ és $\varphi(n^+) = \big(\varphi(n)\big)^{+'}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

95) Fogalmazza meg a természetes számok létezésére vonatkozó tételt.

Van olyan $\big(\mathbb{N}, (0,\ ^+)\big)$ pár, amely eleget tesz a Peano-axiómáknak.

96) Definiálja a karakterisztikus függvény fogalmát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Az X és Y halmazokra, ha $Y \subset X$, akkor legyen $\chi_Y(x) := 1$, ha $x \in Y$ és $\chi_Y(x) := 0$, ha $x \in X \setminus Y$. A χ_Y függvény az Y halmaz X-en értelmezett karakterisztikus függvénye.

Formalizálva: $\chi_Y(x) := \begin{cases} 1, ha\ x \in Y \\ 0, ha\ x \in X \setminus Y \end{cases}$

97) Definiálja természetes számok összeadását.

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $s_m: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ függvény, amelyre $s_m(0) = m$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re $s_m(n^+) = \big(s_m(n)\big)^+$. Az $s_m(n)$ számot $m + n$-nel jelöljük, és az m és n összegének nevezzük.

Formálisan: $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \exists\ s_m: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \left(s_m(0) = m \wedge s_m(n^+) = \big(s_m(n)\big)^+\right)$

98) Fogalmazza meg a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt.

Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor:

- Asszociativitás: $(k + m) + n = k + (m + n)$
- A 0 nullelem: $0 + n = n + 0 = n$
- Kommutativitás: $m + n = n + m$
- Egyszerűsítési/Törlési szabály: $(m + k = n + k) \Rightarrow m = n$

99) Definiálja természetes számok szorzását.

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $p_m: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ függvény, amelyre $p_m(0) = 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re $p_m(n^+) = p_m(n) + m$. A $p_m(n)$ számot $m \cdot n$-nel jelöljük, és az m és n szorzatának nevezzük.

Formálisan: $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \exists\ p_m: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}(p_m(0) = 0 \wedge p_m(n^+) = p_m(n) + m)$

100) Fogalmazza meg a természetes számok szorzásának alaptulajdonságait kimondó tételt.

Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor:

- Asszociativitás: $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$
- $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$
- Az 1 egységelem: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$
- Kommutativitás: $m \cdot n = n \cdot m$
- Disztributivitás: $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$

101) Definiálja a baloldali semleges elem, a jobboldali semleges elem és a semleges elem fogalmát.

A $(G,*)$ grupoid esetén *G* halmaz egy s elemét bal, illetve jobb oldali semleges elemnek nevezzük, ha $s * g = g$, illetve $g * s = g$ minden $g \in G$-re. Ha s bal és jobb oldali semleges elem is, akkor semleges elemnek nevezzük.

102) Igaz-e, hogy legfeljebb egy baloldali semleges elem van?

Nem, a $(G,*)$ grupoid esetén *G*-ben létezhet akárhány bal oldali semleges elem. Például a $(g, h) \mapsto h$ műveletnél minden elem bal oldali semleges elem.

103) Igaz-e, hogy legfeljebb egy semleges elem van?

Igen, ha a $(G,*)$ grupoidban létezik s_b bal oldali és s_j jobb oldali semleges elem, akkor $s_b = s_b * s_j = s_j$, így bármely bal oldali semleges elem megegyezik bármely jobb oldali semleges elemmel, azaz csak egy bal és jobb oldali semleges elem van, ez pedig semleges elem a definíció szerint.

104) Definiálja a félcsoport, a balinverz, a jobbinverz és az inverz fogalmát.

Ha a $*$ binér művelet *G* halmazon asszociatív (azaz $\forall x, y, z \in G: (x * y) * z = x * (y * z)$), akkor $(G,*)$ grupoid félcsoport.

Ha a $(G,*)$ félcsoportban s semleges elem, akkor $g, g^* \in G$-re $g * g^* = s$ esetén g a g* balinverze, g^* pedig a *g* jobbinverze. Ha g^* a *g*-nek bal- és jobbinverze is, akkor g^* a *g* inverze.

105) Igaz-e, hogy egy egységelemes félcsoportban egy elemhez legfeljebb egy inverz elem létezik?

Igen, ha a $(G,*)$ egységelemes félcsoportban *s* semleges elem és $g, g^*, g^{**} \in G$-re g^* a *g* egy balinverze, g^{**} pedig egy jobbinverze, akkor $g^* = g^* * s = g^* * (g * g^{**}) = (g^* * g) * g^{**} = s * g^{**} = g^{**}$, így *g* bármely bal balinverze megegyezik bármely jobbinverzével, azaz csak egy bal- és jobbinverze van, ez pedig *g* inverze a definíció szerint.

106) Igaz-e, hogy egy egységelemes multiplikatív félcsoportban ha *h*-nak és *g*-nek van inverze, akkor *hg*-nek is, és ha igen, mi?

Igen, mert ha a $(G,*)$ egységelemes multiplikatív félcsoportban *e* egyégelem és $h, g \in G$-re *h* illetve *g* inverze h^{-1} illetve g^{-1}, akkor $h \cdot g$ inverze $g^{-1} \cdot h^{-1}$ lesz, ugyanis:

$(h \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot h^{-1}) = h \cdot (g \cdot g^{-1}) \cdot h^{-1} = (h \cdot e) \cdot h^{-1} = h \cdot h^{-1} = e$

107) Definiálja a csoport és az Abel-csoport fogalmát.

Ha egy semleges elemes félcsoport minden elemének van inverze, akkor csoport. Ha a $*$ binér művelet a *G* halmazon és $\forall g, h \in G: g * h = h * g$ teljesül, akkor *g* és *h* felcserélhetőek. Ha *G* bármely két eleme felcserélhető, akkor a $*$ művelet kommutatív. A kommutatív csoportok az Abel-csoportok.

108) Igaz-e, hogy ha *X* tetszőleges halmaz, akkor $(\wp(X),\cap)$ egy egységelemes félcsoport?

Igen, mert a metszet művelet asszociatív, hiszen minden *A*, *B*, *C* halmazra $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, a $\wp(X) \in \wp(X)$ pedig egységelem, mivel $\forall A \in \wp(X)$-re $A \cap \wp(X) = \wp(X) \cap A = A$.

109) Igaz-e, hogy ha *X* tetszőleges halmaz, akkor $(\wp(X), \cup)$ egy csoport?

Nem, mert bár az unió művelet asszociatív, hiszen minden *A*, *B*, *C* halmazra $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, a $\emptyset \in \wp(X)$ pedig nullelem, mivel $\forall A \in \wp(X)$-re $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, viszont nincsen minden $\wp(X)$ minden elemének inverze, mert $\forall A \in \wp(X), A \neq \emptyset \big(\nexists B \in \wp(X)\big) : A \cup B = \emptyset$.

110) Igaz-e, hogy ha *X* tetszőleges halmaz, akkor $(\wp(X), \setminus)$ egy félcsoport?

Nem, mert a $\setminus$ művelet nem asszociatív, hiszen tetszőleges *A*, *B*, *C* halmazra $(A \setminus B) \setminus C \overset{ált}{\neq} A \setminus (B \setminus C)$. Például $A, B, C \in \wp(X)$, $A \neq \emptyset$, $B = C \neq \emptyset$ esetén ha *A* és *B* nem diszjunktak, akkor:
$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus B = A \setminus B \subsetneq A = A \setminus (B \setminus B) = A \setminus (B \setminus C)$

111) Igaz-e, hogy ha *X* tetszőleges halmaz, akkor az *X*-beli binér relációk a kompozícióval egységelemes félcsoportot alkotnak?

Igen, mert a kompozíció művelet asszociatív, hiszen *R*, Q, S relációkra $(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S)$, az $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ pedig egységelem, mivel $\forall R \in X \times X$-re $R \circ \mathbb{I}_X = \mathbb{I}_X \circ R = R$.

112) Igaz-e, hogy ha *X* tetszőleges halmaz, akkor az *X*-et *X*-re képező bijektív leképezések a kompozícióval, mint művelettel csoportot alkotnak?

Igen, mert a kompozíció művelet asszociatív, hiszen *f*, *g*, *h* függvényekre $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, az $e: x \mapsto x$ függvény pedig egységelem, mivel $\forall f: X \longrightarrow X$-re $f \circ e = e \circ f = f$. Ezáltal beláttuk, hogy az $X \longrightarrow X$ típusú függvények egységelemes félcsoportok a kompozícióval. Továbbá a bijektivitás miatt minden elemnek van inverze, mivel az injektivitás miatt f^{-1} is függvény, a szürjektivitás miatt pedig az értelmezési tartomány és az értékkészlet az $X \longrightarrow X$ típusú függvényeknél ugyanaz. Így az *X*-et *X*-re képező bijektív leképezések a kompozícióval, mint művelettel csoportot alkotnak.

113) Definiálja természetes számokra a $\leq$ relációt.

Ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $m \leq n$, ha van olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, hogy $m + k = n$.
Formalizálva: $\forall n, m \in \mathbb{N}: m \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m + k = n$

114) Fogalmazza meg a természetes számokra a $\leq$ reláció és a műveletek kapcsolatát leíró tételt.

Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor:

(1) n^+ közvetlenül követi *n*-et;
(2) $m \leq n \Leftrightarrow m + k \leq n + k$;
(3) $k \neq 0 : m \leq n \Leftrightarrow m \cdot k \leq n \cdot k$;
(4) $m < n \Leftrightarrow m + k < n + k$;
(5) $k \neq 0 : m < n \Leftrightarrow m \cdot k < n \cdot k$;
(6) $m \cdot k = n \cdot k \wedge k \neq 0 \Rightarrow m = n$ (egyszerűsítési/törlési szabály).

115) Definiálja a véges sorozatokat.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $[0, n] \subset \mathbb{N}$ vagy $[1, n] \subset \mathbb{N}^+$ halmazon értelmezett függvények a véges sorozatok. Az *x* véges sorozatot jelölhetjük úgy, hogy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vagy $x_i,\ i = 0,1,2 \ldots n$ illetve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vagy $x_i,\ i = 1,2 \ldots n$.

116) Fogalmazza meg az általános rekurziótételt.

Legyen adott *X* halmaz és egy olyan *f* függvény, amelynek értékkészlete *X* részhalmaza, értelmezési tartománya pedig az összes olyan függvények halmaza, amelyek értékkészlete *X* részhalmaza, értelmezési tartománya pedig $\mathbb{N}$ valamely kezdőszelete. Ekkor egyértelműen létezik egy $g: \mathbb{N} \longrightarrow X$ függvény, amelyre $\forall a \in \mathbb{N}: g(a) = f\big(g|_{]\leftarrow, a[}\big)$ teljesül.

117) Hogyan használható az általános rekurziótétel a Fibonacci-számok definiálására?

Legyen $X := \mathbb{N}$, és legyen az $n \mapsto n^-$ leképezése $\mathbb{N}^+$-nak $\mathbb{N}$-re az $n \mapsto n^+$ leképezés inverze, $f(\emptyset) := 0$, $f(\{(0,k)\}) := 1$ bármely $k \in \mathbb{N}$-re, és ha $n > 1$, $h:]\longleftarrow, n[\longrightarrow \mathbb{N}$ egy függvény, akkor legyen $f(h) := h(n^-) + h(n^{--})$. (Megjegyzés: $n = \min(\mathbb{N} \setminus \operatorname{dmn}(h))$.)

118) Definiálja véges sok elem szorzatát félcsoportban és egységelemes félcsoportban.

Legyen *G* egy multiplikatív félcsoport, $x: \mathbb{N}^+ \longrightarrow G$ pedig egy sorozat. Az általános rekurziótétel alapján definiálható $\prod_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}^+$- úgy, hogy $\prod_{k=1}^{1} x_k := x_1$ és $\prod_{k=1}^{n+1} x_k := (\prod_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1}$. Ha *G* egységelemes félcsoport *e* egységelemmel, akkor $\prod_{k=1}^{0} x_k := e$. Amennyiben $x_k = g, k = 1,2 \dots n$, akkor $\prod_{k=1}^{n} x_k$ helyett g^n is írható. Ez utóbbi a *g* elem *n*. hatványa, ahol *g* az alap és *n* a kitevő.

119) Fogalmazza meg a hatványozás két tulajdonságát félcsoportban és egységelemes félcsoportban.

Egy tetszőleges *G* multiplikatív félcsoportra minden $g \in G$-re teljesülnek az alábbiak minden $m, n \in \mathbb{N}^+$-ra (egységelemes *G* félcsoport esetén minden $m, n \in \mathbb{N}$-re):

- $g^{m+n} = g^m \cdot g^n$
- $(g^m)^n = g^{mn}$

120) Fogalmazza meg a hatványozásnak azt a tulajdonságát, amely csak a felcserélhető elemekre érvényes.

Ha g és h a *G* multiplikatív félcsoport felcserélhető elemei, akkor $(gh)^n = g^n \cdot h^n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. (Ha *G* egységelemes félcsoport, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re.)

121) Hogyan értelmeztük a $\sum_{a \in A} x_a$ jelölést?

Ha G egy kommutatív félcsoport, $x: A \longrightarrow G$ egy tetszőleges függvény és van olyan $\varphi: \{k \in \mathbb{N}: 1 \leq k \leq n\} \longrightarrow A$ kölcsönösen egyértelmű leképezés ($n \in \mathbb{N}^+$-ra, illetve nullgelemes *G* félcsoport esetén $n \in \mathbb{N}$-re), amely *A*-ra képez, akkor minden ilyen leképezésre $\sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ ugyanaz - ez az általános kommutativitás tétele. Ezt a közös értéket jelöljük $\sum_{a \in A} x_a$-val is jelölhetjük.

122) Fogalmazza meg a maradékos osztás tételét. Definiálja a hányadost és a maradékot természetes számok osztásánál, a páros és páratlan természetes számokat.

Legyen $n > 0$ természetes szám. Minden *m* természetes szám egyértelműen felírható $m = qn + r$ alakban, ahol $q, r \in \mathbb{N}$ és $r < n$. Ezt nevezzük *m* szám *n*-nel való maradékos osztásának, ahol *q* a hányados és *r* a maradék.

Ha *m* természetes szám 2-vel való maradékos osztásánál a maradék 0, akkor *m* páros, egyébként pedig páratlan.

123) Fogalmazza meg a számrendszerekre vonatkozó tételt.

Legyen $q > 1$ természetes szám. Ekkor $\forall m > 0$ természetes számhoz egy és csak egy olyan *n* természetes szám és $a_0, a_1, \dots, a_n \in [0, q[\subset \mathbb{N}$ sorozat létezik, amelyre $a_n \neq 0$ és $m = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot q^i$.

124) Mikor mondjuk, hogy egy binér művelet kompatibilis egy osztályozással? Adjon ekvivalens megfogalmazást, és definiálja a műveletet az osztályok között.

Legyen adott *X* halmaz és a $*$ binér művelet rajta, továbbá *X* egy osztályozása, illetve a megfelelő $\sim$ ekvivalenciareláció. A $*$ művelet kompatibilis az osztályozással, illetve az $\sim$ ekvivalenciarelációval, ha $x \sim x' \land y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y'$. (Az ekvivalenciareláció tulajdonságai miatt $x \sim x' \land y \sim y' \Rightarrow (x * y \sim x' * y \land x * y \sim x * y')$ teljesülése is elegendő.)

Ha a $*$ művelet kompatibilis az osztályozással, akkor az ekvivalenciaosztályok terén, $\tilde{X}$-on bevezethető egy $\tilde{*}$ műveletet az $\tilde{x} \,\tilde{*}\, \tilde{y} = \widetilde{x * y}$ definícióval. Általában $\tilde{*}$ helyett $*$-ot írunk. Az $x \mapsto \tilde{x}$ kanonikus leképezés az így definiált műveletre nézve művelettartó.

125) Mikor mondjuk, hogy egy binér reláció kompatibilis egy osztályozással? Adjon ekvivalens megfogalmazást, és definiálja a relációt az osztályok között.

Legyen adott *X* halmaz és az *R* mint *X*-beli binér reláció, továbbá *X* egy osztályozása, illetve a megfelelő $\sim$ ekvivalenciareláció. Az *R* reláció kompatibilis az osztályozással, illetve az $\sim$ ekvivalenciarelációval, ha $x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow (xRy \Rightarrow x'Ry')$. (Az ekvivalenciareláció tulajdonságai miatt $x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow \big(xRy \Rightarrow (x'Ry \wedge xRy')\big)$ teljesülése is elegendő.)

Ha az *R* reláció kompatibilis az osztályozással, akkor az ekvivalenciaosztályok terén, $\tilde{X}$-on bevezethető egy $\tilde{R}$ relációt az $xRy \Rightarrow \tilde{x}\tilde{R}\tilde{y}$ definícióval. Általában $\tilde{R}$ helyett *R*-et írunk.

126) Definiálja az egész számokat a műveletekkel és a rendezéssel és fogalmazza meg az egész számok tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en az $(m,n) \sim (m',n') : m + n' = m' + n$ ekvivalencirelációt, az $(m,n) + (m',n') = (m + m', n + n')$ összeadást és az $(m,n) \cdot (m',n') = (m \cdot m' + n \cdot n', m \cdot n' + m' \cdot n)$ szorzást, valamint az $(m,n) \leq (m',n') : m + n' \leq m' + n$ relációt. Az ekvivalenciaosztályok halmaza az egész számok, jele: $\mathbb{Z}$. Az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezett az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció, amely rendezés. Továbbá igazak az alábbi tulajdonságok:

(1) $\mathbb{Z}$ az összeadásra nézve Abel-csoport;
(2) $\mathbb{Z}$ a szorzással kommutatív egységelemes félcsoport;
(3) $\forall x, y \in \mathbb{Z}(x, y \neq 0): x \cdot y \neq 0$
(4) Disztributivitás: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(5) Az összeadás monoton: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}(x \leq y): x + z \leq y + z$
(6) A szorzás monoton: $\forall x, y \in \mathbb{Z}(x, y \geq 0): x \cdot y \geq 0$

127) Adja meg $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{Z}$-be való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságait.

A $\varphi: n \mapsto \widetilde{(n,0)}$ leképezése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{Z}$-be injektív, összeadás- és szorzástartó, monoton növekedő, valamint $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n) = n\,\varphi(1)$. Így $\varphi(\mathbb{N})$ azonosítható $\mathbb{N}$-nel. Ezzel az azonosítással pedig $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ és $\mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}) = \{0\}$.

128) Definiálja egy csoportban az egész kitevős hatványozást és fogalmazza meg két tulajdonságát.

Egy tetszőleges G csoportban minden $g \in G$-re értelmezett az $n \mapsto g^n$ leképezés minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ez a leképezés a $g^{-n} = (g^{-1})^n$ definícióval kiterjeszthető egy $\mathbb{Z}$-n értelmezett leképezéssé.

Erre a leképezésre minden $g \in G$ és minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén teljesülnek az alábbiak:

- $g^{m+n} = g^m \cdot g^n$
- $(g^m)^n = g^{mn}$

129) Definiálja egy csoportban az egész kitevős hatványozást és fogalmazza meg egy olyan tulajdonságát, amely csak felcserélhető elemekre érvényes.

Egy tetszőleges G csoportban minden $g \in G$-re értelmezett az $n \mapsto g^n$ leképezés minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ez a leképezés a $g^{-n} = (g^{-1})^n$ definícióval kiterjeszthető egy $\mathbb{Z}$-n értelmezett leképezéssé.

Ha *g* és *h* a *G* csoport felcserélhető elemei, akkor $(gh)^n = g^n \cdot h^n$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re.

130) Definiálja a nullgyűrű és a zérógyűrű fogalmát.

A nullgyűrű olyan gyűrű, amelynek csak egyetlen eleme van, ez pedig szükségszerűen a 0 nullelem. (Különben a gyűrű *R* alaphalmaza nem alkotna az összeadással Abel-csoportot, de még csoportot se.)

A zérógyűrűben bármely két elem szorzata 0 nullelem.

131) Definiálja a bal és jobb oldali nullosztó és a nullosztópár fogalmát.

Ha *x* és *y* egy gyűrű nullától különböző elemei és $x \cdot y = 0$, akkor *x* és *y* egy nullosztópár, ahol *x* a bal oldali, *y* pedig a jobb oldali nullosztó.

132) Fogalmazza meg az általános disztributivitás tételét.

Egy tetszőleges *R* gyűrűben:

(1) ha $m, n \in \mathbb{N}$, valamint $a_1, a_2, \dots, a_m$ és $b_1, b_2, \dots, b_n$ a gyűrű tetszőleges elemei, akkor:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

(2) ha $m \in \mathbb{N}^+$, $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, valamint $a_{i,j_i} \in R$ (ahol $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j_i \leq n_i$), akkor:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j_i}^{n_i} a_{i,j_i}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i}$$

133) Definiálja az integritási tartomány fogalmát.

Egy legalább kételemű gyűrű nullosztómentes, ha nincsenek benne nullosztópárok. A kommutatív nullosztómentes gyűrű az integritási tartomány.

134) Definiálja a rendezett integritási tartomány fogalmát.

Az *R* gyűrű rendezett integritási tartomány, ha integritási tartomány, alaphalmaza rendezett, valamint az összeadás és a szorzás is monoton.

Formálisan: $\forall x, y, z \in R(x \leq y) : x + z \leq y + z$ (az összeadás monoton)
$\forall x, y \in R(x, y \geq 0) : x \cdot y \geq 0$ (a szorzás monoton)

135) Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy integritási tartomány rendezett integritási tartomány legyen.

Egy *R* rendezett halmaz, amely integritási tartomány akkor és csak akkor rendezett integritási tartomány, ha az összeadás és a szorzás is szigorúan monoton.

Formálisan: $\forall x, y, z \in R(x < y) : x + z < y + z$ (az összeadás szigorúan monoton)
$\forall x, y \in R(x, y > 0) : x \cdot y > 0$ (a szorzás szigorúan monoton)

136) Fogalmazza meg a rendezett integritási tartományban az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait leíró tételt.

Legyen *R* egy rendezett integritási tartomány. Ekkor teljesül az alábbi 5 szabály $\forall x, y, z \in R$-re:

(1) ha $x > 0$, akkor $-x < 0$, és ha $x < 0$, akkor $-x > 0$;
(2) ha $x < y$ és $z > 0$, akkor $xz < yz$;
(3) ha $x < y$ és $z < 0$, akkor $xz > yz$;
(4) ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$; speciálisan, ha van egységelem, akkor az pozitív;
(5) ha 1 az egységelem, $0 < x < y$, és *x*-nek és *y*-nak is van multiplikatív inverze, akkor $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

137) Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel és a rendezéssel és fogalmazza meg a racionális számok tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$-n az $(m,n) \sim (m',n') : mn' = nm'$ ekvivalencirelációt, az $(m,n) + (m',n') = (mn' + nm', nn')$ összeadást és az $(m,n) \cdot (m',n') = (m \cdot m', n \cdot n')$ szorzást, valamint az $(m,n) \leq (m',n') : \left((m'n - n'm)nn'\right) \geq 0$ relációt. Az ekvivalenciaosztályok halmaza a racionális számok, jele: $\mathbb{Q}$. Az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így a racionális számok között értelmezett az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció, amely rendezés. Továbbá igazak az alábbi tulajdonságok:

(1) $\mathbb{Q}$ az összeadásra nézve egységelemes integritási tartomány;
(2) $\mathbb{Q}$ nem nulla elemei a szorzással Abel-csoportot alkotnak;
(3) Az összeadás monoton: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}(x \leq y): x + z \leq y + z$
(4) A szorzás monoton: $\forall x, y \in \mathbb{Q}(x, y \geq 0): x \cdot y \geq 0$

138) Adja meg $\mathbb{Z}$-nek $\mathbb{Q}$-ba való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságait.

A $\varphi: n \mapsto \widetilde{(n,1)}$ leképezése $\mathbb{Z}$-nek $\mathbb{Q}$-ba injektív, összeadás- és szorzástartó, monoton növekedő, valamint $\forall n \in \mathbb{Z}: \varphi(n) = n\,\varphi(1)$. Így $\varphi(\mathbb{Z})$ azonosítható $\mathbb{Z}$-vel. Ezzel az azonosítással pedig a $\mathbb{Q}$ minden eleme $\frac{m}{n}$ alakban írható, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$.

139) Definiálja a test és a ferdetest fogalmát és adjon három példát testre.

A tetszőleges *F* gyűrű - melyben a nullelemet 0-val jelöljük – ferdetest, ha $F \setminus \{0\}$ a szorzással csoportot alkot. A szorzás egységelemét rendszerint 1-gyel jelöljük. Ha a szorzás kommutatív, akkor a ferdetest egy test.
Test például a racionális, a valós és a komplex számok halmaza.

140) Definiálja a rendezett test fogalmát és adjon példát olyan testre, amely nem tehető rendezett testté.

A rendezett test olyan test, amely rendezett integritási tartomány is.
A $\{0,1\}$ halmaz a $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ összefüggésekkel megadott összeadással és a $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ összefüggésekkel megadott szorzással kételemű test, de nincsen olyan rendezés, amellyel rendezett test lenne, mert a rendezett testben $1 > 0$ és $-1 < 0$, de a fenti kételemű testben $-1 = 1$.

141) Adja meg $\mathbb{Q}$-nak egy rendezett testbe való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságait.

Ha *F* egy tetszőleges rendezett test az *e* egységelemmel, akkor egyértelműen létezik a $\varphi: \mathbb{Q} \mapsto F$ leképezés, mely injektív, összeadás- és szorzástartó, monoton növekedő, valamint $\forall m, n \in \mathbb{Z}(n \neq 0)$: $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{me}{ne}$. Így $\varphi(\mathbb{Q})$ azonosítható $\mathbb{Q}$-val.

142) Fogalmazza meg a felső határ tulajdonságot és az Archimédészi tulajdonságot.

Egy *F* rendezett test felső határ tulajdonságú, ha minden nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja. Formálisan: $\forall F \supset Y \neq \emptyset(\exists x \in X(\forall y \in Y): x \geq y): \exists \sup Y$.
Az *F* rendezett test arkhimédészi tulajdonságú, ha $\forall x, y \in F, x, y \geq 0\ (\exists y \in \mathbb{N}): nx \geq y$.

143) Fogalmazza meg a racionális számok felső határ tulajdonságára és az Archimédészi tulajdonságra vonatkozó tételt.

A racionális számok rendezett teste arkhimédészi tulajdonságú, de nem felső határ tulajdonságú.

144) Fogalmazza meg a valós számok egyértelműségét leíró tételt.

Legyen $\mathbb{R}'$ és $\mathbb{R}''$ két felső határ tulajdonságú test. Ekkor létezik egy φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{R}'$-nek $\mathbb{R}''$-re, amely monoton növekedő, összeadás- és szorzástartó. Egy felső határ tulajdonságú testet a valós számok testének nevezünk, az előbbiek értelmében legfeljebb egy ilyen van.

145) Definiálja valós szám abszolút értékét és a *sgn* függvényt.

Ha x egy valós szám, akkor $|x| := x$, ha $x \geq 0$, és legyen $|x| := -x$, ha $x < 0$ az abszolút érték. Az $\operatorname{sgn}(x) := 0$, ha $x = 0$ és $\operatorname{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}$ egyébként pedig az előjel függvény.

146) Fogalmazza meg a valós számok létezését leíró tételt.

Létezik felső határ tulajdonságú test. Egy felső határ tulajdonságú testet a valós számok testének nevezünk.

147) Definiálja a komplex számok halmazát a műveletekkel.

A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a valós számpárok halmaza, az $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ összeadással és a $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - y'y, y'x + yx')$ szorzással, mint műveletekkel.

$\mathbb{C}$ test a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0,0)$ pár, az egységelem az $(1,0)$ pár, az (x, y) pár additív inverze a $(-x, -y)$ pár, a nullelemtől való különbözőség esetén pedig a multiplikatív inverze a $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ pár.

148) Adja meg $\mathbb{R}$ beágyazását $\mathbb{C}$-be.

Ha $x, x' \in \mathbb{R}$, akkor $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$ és $(x, 0) \cdot (x', 0) = (x \cdot x', 0)$, így az $x \mapsto (x, 0)$ leképezés injektív, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{C}$-be, ezért az összes $(x, 0) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ alakú komplex számok halmazát azonosíthatjuk $\mathbb{R}$-rel.

149) Definiálja *i*-t, komplex szám valós és képzetes részét, konjugáltját és a képzetes számok fogalmát.

A $(0,1)$ komplex számot az *i* jelöli, segítségével a tetszőleges (x, y) komplex szám $x + iy$ alakba írható. Ez a komplex számok algebrai alakja, ami természetesen egyértelmű felírás.

Ha $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, akkor az *x* a *z* valós része (jele: $\Re(z)$ vagy $\operatorname{Re}(z)$), az *y* pedig a *z* képzetes része (jele: $\Im(z)$ vagy $\operatorname{Im}(z)$).

A fenti algebrai alakban felírt *z* komplex szám konjugáltja a $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy \in \mathbb{C}$ szám.

Ha egy komplex szám képzetes része nulla, akkor valósnak nevezzük. Ha a valós része nulla és a képzetes része nem nulla, akkor képzetesnek nevezzük.

150) Fogalmazza meg a komplex konjugálás tulajdonságait.

Ha $z, w \in \mathbb{C}$, akkor teljesülnek az alábbi konjugálásra vonatkozó összefüggések:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$

151) Definiálja komplex szám abszolút értékét. Milyen analízisbeli tételt használt?

A komplex számokat a sík origóból kiinduló vektorainak tekintve a komplex számok abszolút értéke ennek a vektornak a hossza. Azaz az $(x, y) \in \mathbb{C}$ szám abszolút értéke $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ehhez felhasználtuk azt az analízisbeli tételt, mely szerint: $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^+ : !\exists y \in \mathbb{R}_0^+ (y^n = x)$. Ekkor az *y* szám az *x* szám *n*. gyöke, jele: $y = \sqrt[n]{x}$.

152) Fogalmazza meg a komplex számok abszolút értékének tulajdonságait.

Ha $z, w \in \mathbb{C}$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor teljesülnek az alábbi abszolút értékre vonatkozó összefüggések:

- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, ha $z \neq 0$
- $|(x, 0)| = |x|$ (Valós számok abszolút értéke a megszokott.)
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|0| = 0$
- $|z| > 0$, ha $z \neq 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|\Re(z)| \leq |z|$
- $|\Im(z)| \leq |z|$
- $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (A háromszög-egyenlőtlenség.)
- $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$

153) Definiálja komplex számokra az *sgn* függvényt és fogalmazza meg tulajdonságait.

Az előjel függvény a komplex számokon tetszőleges $z \in \mathbb{C}$-re: $\operatorname{sgn}(z) := 0$, ha z$= 0$ és $\operatorname{sgn}(z) := \frac{z}{|z|}$ egyébként. A valós számokra visszakapjuk a valós számok halmazán definiált *sgn* függvényt. Továbbá teljesülnek a következő tulajdonságok tetszőleges $z \in \mathbb{C}$-re:

- $\operatorname{sgn}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sgn}(z)}$
- $|\operatorname{sgn}(z)| = 1$, ha $z \neq 0$

154) Definiálja komplex számok trigonometrikus alakját és argumentumát.

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor van olyan t valós szám, amelyre $\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t$. Ha ez az összefüggés fennáll t-re, akkor a $t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ számokra is, és csak ezekre. Ekkor $z = |z| \cdot (\cos t + i \sin t)$, ez a komplex szám trigonometrikus alakja.

Ha $z = 0$, akkor akármilyen $t \in \mathbb{R}$ szám választható. Ha $z \neq 0 \in \mathbb{C}$, akkor z argumentuma (jele: $\arg(z)$) az az egyetlen *t* valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t$; ez az egyetlen *t* valós szám a $]-\pi; \pi]$ intervallumon, amelyre $z = |z| \cdot (\cos t + i \sin t)$.

155) Írja fel két komplex szám szorzatát és hányadosát trigonometrikus alakjuk segítségével.

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$, trigonometrikus alakjukban $z := |z| \cdot (\cos t + i \sin t)$ és $w := |w| \cdot (\cos s + i \sin s)$, ahol $t, s \in \mathbb{R}$. Ekkor *z* és *w* szorzata valamint hányadosa a trigonometrikus alakjuk segítségével:

- $z \cdot w = |z| \cdot (\cos t + i \sin t) \cdot |w| \cdot (\cos s + i \sin s)$
  $= |zw| \cdot \big(\cos t \cos s - \sin t \sin s + i(\cos t \sin s + \cos s \sin t)\big)$
  $= |zw| \cdot (\cos(t + s) + i \sin(t + s))$
- $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(t - s) + i \sin(t - s))$, figyelembe véve, hogy $w \neq 0$.

156) Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$, írja fel a $z^n = w$ egyenlet összes megoldását.

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0,1, \dots, n - 1$$

Amennyiben $w = 0$, akkor $z_k = 0$, $(k \in [1; n - 1])$, egyébként különböző komplex számok.

157) Írja fel az *n*-edik komplex egységgyököket. Mit értünk primitív *n*-edik egységgyök alatt?

A $\varepsilon^n = 1$ egyenlet megoldásai az *n*. komplex egységgyökök. Ekkor $|\varepsilon| = 1$ és $t = 0$, így:

$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k = 0,1,\ldots,n-1$

Azok az *n*. egységgyökök, amelyek hatványaként az összes többi előáll, az úgynevezett primitív *n*. komplex egységgyökök. (Például $n \geq 2$ esetén ε_1 és ε_{n-1} mindig primitív egységgyökök.)

158) Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$, írja fel a $z^n = w$ egyenlet összes megoldását az *n*-edik egységgyökök segítségével.

$z_k = z \cdot \varepsilon_k, k = 0,1,\ldots,n-1$

159) Fogalmazza meg az algebra alaptételét.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, valamint $c_0, c_1, \ldots, c_n$ komplex számok és $c_n \neq 0$, akkor van olyan *z* komplex szám, amelyre $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k = 0$. Másként fogalmazva, minden legalább elsőfokú komplex együtthatós algebrai egyenletnek van komplex gyöke.

160) Definiálja a kvaterniók halmazát a műveletekkel.

A kvaterniók halmaza $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, a komplex számpárok halmaza, az $(z,w) + (z',w') = (z+z', w+w')$ összeadással és a $(z,w) \cdot (z',w') = \left(zz' - \overline{w'}w, w'z + w\overline{z'}\right)$ szorzással, mint műveletekkel.

161) Milyen algebrai struktúrát alkotnak a kvaterniók?

$\mathbb{H}$ ferdetest a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0,0)$ pár, az egységelem az $(1,0)$ pár, az (z,w) pár additív inverze a $\left(-z, -w\right)$ pár, a nullelemtől való különbözőség esetén pedig a multiplikatív inverze a $\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}+w\bar{w}}, -\frac{w}{z\bar{z}+w\bar{w}}\right)$ pár.

162) Adja meg a komplex számok beágyazását a kvaterniókba.

Ha $z, z' \in \mathbb{C}$, akkor $(z,0) + (z',0) = (z+z',0)$ és $(z,0) \cdot (z,0) = (z \cdot z', 0)$, így a $z \mapsto (z,0)$ leképezés injektív, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{C}$-nek $\mathbb{H}$-ba, ezért az összes $(z,0) \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$ alakú kvaterniók halmazát azonosíthatjuk $\mathbb{C}$-vel.

163) Definiálja a *j* és *k* kvaterniókat. Hogyan írhatunk fel egy kvaterniót *i*, *j* és *k* segítségével?

A $(0,1)$ kvaterniót *j* jelöli, segítségével a tetszőleges (z,w) kvaternió $z + wj$ alakba írható és ez a felírás természetesen egyértelmű. A $(0,i)$ kvaterniót k jelöli, segítségével a tetszőleges (z,w) kvaternió felírható $a + bi + cj + dk$ alakban, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ez a felírás természetesen egyértelmű, mert $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$, $c = \Re(w)$ és d$= \Im(w)$.

164) Igaz-e, hogy bármely kvaternió bármely valós számmal felcserélhető?

Igen, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $p \in \mathbb{H}$-ra $x \cdot p = p \cdot x$.

165) Igaz-e, hogy bármely kvaternió bármely komplex számmal felcserélhető?

Nem, például tetszőleges $z \in \mathbb{C}$-re $j \cdot z = \bar{z} \cdot j \overset{\text{ált}}{\neq} z \cdot j$.

166) Adja meg az *i*, *j*, *k* kvaterniók „szorzótábláját”.

$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j.$

167) Definiálja kvaternió valós és képzetes részét és konjugáltját.

Ha $p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor az *a* valós szám a *p* valós része (jele: $\Re(p)$ vagy $\mathrm{Re}(p)$), a $bi + cj + dk$ kvaternió pedig a *p* képzetes része (jele: $\Im(p)$ vagy $\mathrm{Im}(p)$).

A fenti alakban írt *p* kvaternió konjugáltja a $\bar{p} = \overline{a + b\imath + c\jmath + dk} = a - bi - cj - dk \in \mathbb{H}$ kvaternió.

168) Fogalmazza meg a kvaterniók konjugáltjára vonatkozó állításokat.

Ha $p, q \in \mathbb{H}$, akkor teljesülnek az alábbi konjugálásra vonatkozó összefüggések:

- $\bar{\bar{p}} = p$
- $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$
- $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$
- $p + \bar{p} = 2\Re(p)$
- $p - \bar{p} = 2i\Im(p)$

169) Definiálja a belső és a külső szorzást a kvaterniók segítségével.

A $p = xi + yj + zk$ és $p' = x'i + y'j + z'k$ tisztán képzetes kvaterniók szorzatának valós része – $\langle p, p' \rangle$, ahol $\langle p, p' \rangle = xx' + yy' + zz'$, képzetes része pedig $p \times p' = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k$. A $(p, p') \mapsto \langle p, p' \rangle$ leképezés a belső szorzás. A $(p, p') \mapsto p \times p'$ leképezés a vektori/külső szorzás, ez a művelet nem kommutatív, viszont az összeadásra nézve mindkét oldalról disztributív. Ha pedig *p''* is egy tisztán képzetes kvaternió, akkor a $(p, p', p'') \mapsto \langle p, p', p'' \rangle$ a vegyes szorzás.

170) Definiálja kvaterniók abszolút értékét és sorolja fel a tulajdonságait.

Egy kvaternió abszolút értéke a hossza, mint vektornak $\mathbb{R}^4$-ben ábrázolva.

Azaz ha $p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor $|p| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Ha $p, q \in \mathbb{H}$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor teljesülnek az alábbi abszolút értékre vonatkozó összefüggések:

- $\frac{1}{p} = \frac{1}{|p|^2} \cdot \bar{p}$, ha $p \neq 0$
- $|(z, 0)| = |z|$ (Komplex számok abszolút értéke a megszokott.)
- $p \cdot \bar{p} = |p|^2$
- $|0| = 0$
- $|p| > 0$, ha $p \neq 0$
- $|\bar{p}| = |p|$
- $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$
- $|\Re(p)| \leq |p|$
- $|\Im(p)| \leq |p|$
- $|p| \leq |\Re(p)| + |\Im(p)|$
- $|p + q| \leq |p| + |q|$ (A háromszög-egyenlőtlenség.)
- $\big||p| - |q|\big| \leq |p - q|$

171) Definiálja halmazok ekvivalenciáját és sorolja fel tulajdonságait.

Az *X* és *Y* halmazok ekvivalensek, ha létezik *X*-et *Y*-ra leképező injektív leképezés. Jelölése: $X \sim Y$.

Amennyiben X, Y és Z halmazok, akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- Reflexivitás: $X \sim X$
- Szimmetria: $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- Tranzitivitás: $X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

172) Ha az *X* és *X'* illetve *Y* és *Y'* halmazok ekvivalensek, milyen más halmazok ekvivalenciájára következtethetünk még ebből?

Ha $X \sim X'$ és $Y \sim Y'$, akkor $X \times Y \sim X' \times Y'$ az $(x, y) \mapsto \big(f(x), g(y)\big)$ leképezéssel.

173) Definiálja a véges és a végtelen halmazok fogalmát.

Egy *X* halmaz véges, ha valamely *n* számra ekvivalens $\{1,2, \dots, n\}$a halmazzal, egyébként végtelen.

174) Definiálja egy véges halmaz elemeinek a számát. Hogyan jelöljük? Mit használt fel a definícióhoz?

Az az egyértelműen meghatározott természetes szám, mely egy adott X véges halmaz ekvivalens $\{1,2,\dots,n\}$-nel, az X halmaz elemeinek száma, más néven számossága. Jelölése: $\#(X)$ vagy $\operatorname{card}(X)$, esetleg $|X|$ vagy $\overline{\overline{X}}$.

A definícióhoz felhasználtuk, hogy minden halmaz legfeljebb egy *n*-re ekvivalens a $\{1,2,\dots,n\}$ halmazzal.

175) Fogalmazza meg a véges halmazok és elemszámuk tulajdonságait leíró tételt.

Legyenek *X* és *Y* halmazok. Ekkor teljesülnek rájuk a következő tulajdonságok:

(1) ha *X* véges és $Y \subset X$, akkor *Y* is véges, és $\#(Y) \leq \#(X)$;
(2) ha *X* véges és $Y \subsetneq X$, akkor $\#(Y) < \#(X)$;
(3) ha *X* és *Y* végesek és diszjunktak, akkor $X \cup Y$ is véges, és $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$;
(4) ha *X* és *Y* végesek, akkor $\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#(X) + \#(Y)$;
(5) ha *X* és *Y* végesek, akkor $X \times Y$ is véges, és $\#(X \times Y) = \#(X) \cdot \#(Y)$;
(6) ha *X* és *Y* végesek, akkor X^Y is véges, és $\#(X^Y) = \#(X)^{\#(Y)}$;
(7) ha *X* véges halmaz, akkor $\wp(X)$ is véges, és $\#(\wp(X)) = 2^{\#(X)}$;
(8) ha *X* véges és az *f* függvény *X*-et *Y*-ra képezi, akkor *Y* is véges, $\#(Y) \leq \#(X)$, és ha *f* nem injektív, akkor $\#(Y) < \#(X)$.

176) Fogalmazza meg a skatulyaelvet.

Ha *X* és *Y* véges halmazok, és $\#(X) > \#(Y)$, akkor egy $f: X \longrightarrow Y$ leképezés nem lehet injektív.

177) Mit mondhatunk véges halmazban minimális és maximális elem létezéséről?

Részben rendezett halmaz bármely nem üres véges részhalmazának van maximális és minimális eleme.

178) Definiálja a permutációk fogalmát. Mi a szokásos művelet és milyen algebrai struktúrát kapunk?

Egy halmaz permutációja a halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Az *X* halmaz összes permutációi csoportot alkotnak a $\circ$ műveltre, azaz az összetett függvény képzésre, amelyben $\mathbb{I}_X$ az egységelem, és egy elem csoportbeli inverze a relációként vett inverze.

179) Definiálja az ismétléses variációk fogalmát. Mit mondhatunk egy véges halmaz összes ismétléses variációinak számáról?

Az *A* halmaz elemeiből készíthető $a_1, a_2, \dots, a_k$ sorozatok, azaz $\{1,2,\dots,k\}$-t *A*-ba képező leképezések az *A* halmaz *k*-ad osztályú ismétléses variációi. Ha *A* véges halmaz és $\#(A) = n$, akkor ezek száma (jele: ${}^{i}V_n^k$ vagy $V_n^{k,i}$) n^k.

180) Fogalmazza meg a binomiális tételt.

Legyenek *x* és *y* egy *R* kommutatív egységelemes gyűrű elemei, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

181) Fogalmazza meg a polinomiális tételt.

Legyen $r \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_r$ egy *R* kommutatív egységelemes gyűrű elemei, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} P_n^{i_1,i_2,\dots,i_r} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r}$$

182) Fogalmazza meg a logikai szita formulát.

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_k$ az X véges halmaz részhalmazai, f az X-en értelmezett, értékeket egy Abel-csoportban felvevő függvény. Ha $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le k$, akkor legyen:

$$Y_{i_1,i_2,\dots,i_r} = X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_r}$$

Legyen továbbá:

$$S = \sum_{x \in X} f(x)$$

$$S_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le k} \sum_{x \in Y_{i_1,i_2,\dots,i_r}} f(x)$$

Valamint legyen:

$$S_0 = \sum_{x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} X_i} f(x)$$

Ekkor:

$$S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^k S_k$$

183) Definiálja a természetes számok körében az oszthatóságot és adja meg a jelölését.

Az $m \in \mathbb{N}$ számot $n \in \mathbb{N}$ szám osztója, illetve az *n* az *m* többszöröse, azaz *n* osztható *m*-mel, ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $n = mk$. Az oszthatóság jelölése: $m|n$.

Formálisan: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m|n : \exists k \in \mathbb{N}(n = m \cdot k)$

184) Sorolja fel a természetes számok körében az oszthatóság alaptulajdonságait.

A természetes számok körében igazak a következő oszthatóságra vonatkozó összefüggések:

(1) ha $m|n$ és $m'|n'$, akkor $mm'|nn'$;
(2) a 0-nak minden természetes szám osztója;
(3) a 0 csak saját magának osztója;
(4) az 1 minden természetes számnak osztója;
(5) ha $m|n$, akkor $mk|nk$ minden $k \in \mathbb{N}$-re;
(6) ha $k \in \mathbb{N}^+$ és $mk|nk$, akkor $m|n$;
(7) ha $m|n_i$ és $k_i \in \mathbb{N}$, $(i = 1,2, \dots, j)$, akkor $m|\sum_{i=1}^{j} k_i n_i$;
(8) bármely nem 0 természetes száma bármely osztója kisebb vagy egyenlő, mint a szám;
(9) az | reláció részbenrendezés (reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus).

185) Definiálja a természetes számok körében a prímszám és a törzsszám fogalmát. Mi a kapcsolat a két fogalom között?

Az $n > 1$ természetes szám törzsszám, ha az 1-en és saját magán kívül nincs más osztója, azaz csak triviális módon, $1 \cdot n = n \cdot 1$ alakban írható fel természetes számok szorzataként.

A $p > 1$ természetes szám prímszám, ha $p|km$ $(k, m \in \mathbb{N})$ esetén $p|k$ vagy $p|m$.

A törzsszámok és prímszámok halmaza egyenlő.

186) Definiálja egységelemes integritási tartományban az oszthatóságot és adja meg a jelölését.

Egy *R* egységelemes integritási tartományban, ha $a, b \in R$, akkor a *b* az *a* osztója, illetve az *a* a *b* többszöröse, azaz *a* osztható *b*-vel, ha létezik olyan $c \in R$ szám, amelyre $a = bc$. Az oszthatóság jelölése: $b|a$.

187) Sorolja fel egységelemes integritási tartományban az oszthatóság alaptulajdonságait.

Egy *R* egységelemes integritási tartomány elemei körében igazak a következő oszthatóságra vonatkozó összefüggések:

(1) ha $a|b$ és $a'|b'$, akkor $aa'|bb'$;
(2) a 0-nak minden természetes szám osztója;
(3) a 0 csak saját magának osztója;
(4) az 1 minden természetes számnak osztója;
(5) ha $b|a$, akkor $bc|ac$ minden $c \in R$-re;
(6) ha $bc|ac$ és $c \neq 0$, akkor $b|a$;
(7) ha $b|a_i$ és $c_i \in \mathbb{N}$, $(i = 1,2,\dots,j)$, akkor $b|\sum_{i=1}^{j} c_i a_i$;
(8) az | reláció reflexív és tranzitív.

188) Definiálja az asszociáltak fogalmát és sorolja fel ennek a kapcsolatnak a tulajdonságait.

Ha egy *R* egységelemes integritási tartomány *a* és *b* elemére igaz, hogy $a|b \wedge b|a$, akkor *a* és *b* asszociáltak. Ez a reláció ekvivalenciareláció, továbbá kompatibilis a szorzással. A nullának (nullelem) mindig csak saját maga az asszociáltja. A | reláció kompatibilis ezzel az ekvivalenciarelációval, és az ekvivalenciaosztályokon tekintve részbenrendezést kapunk.

189) Definiálja az egységek fogalmát és sorolja fel az egységek halmazának tulajdonságait.

Az egységek az 1 (egységelem) asszociáltjai. Egy elem asszociáltjait leírhatjuk az egységek segítségével, amelyek nem mások, mint 1 osztói, hiszen 1 bárminek osztója.

Másképpen: az egységek *R* egységelemes integritási tartomány azon elemei, amelyeknek van a szorzásra nézve inverzük. Az egységek a szorzásra nézve Abel-csoportot alkotnak, a gyűrű egységcsoportját. Az egységek bármely $a \in R$-nak osztói, mert $1a$-nak osztói.

190) Mi a kapcsolat az egységek és az asszociáltak között?

Az $a \in R$ asszociáltjai az εa alakú elemek, ahol ε egység, *R* pedig egységelemes integritási tartomány.

191) Definiálja a Gauss-egészek gyűrűjét. Igaz-e, hogy két egység van?

A Gauss-egészek egységelemes gyűrűje: $G = \{n + im: n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Négy egység van: ± 1 és $\pm i$.

192) Definiálja az egységelemes integritási tartományban a prímelem és az irreducibilis elem fogalmát. Mi a kapcsolat a két fogalom között?

Az *R* egységelemes integritási tartomány egy $a \neq 0$ eleme felbonthatatlan (más néven: irreducibilis), ha nem egység, és csak triviális módon írható fel szorzatként, tehát $a = bc$ $(b, c \in R)$ esetén *b* vagy c egység.

A $0 \neq p \in R$ elem prímelem, ha nem egység, és $p|ab$ $(a, b \in R)$ esetén $p|a$ vagy $p|b$.

A felbonthatatlan elemek és a prímelemek halmaza egyenlő.

193) Mit értünk egységelemes integritási tartományban legnagyobb közös osztó alatt?

Az *R* egységelemes integritási tartományban az $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ elemeknek a $b \in R$ elem legnagyobb közös osztója, ha $i = 1,2,\dots,n$ esetén $b|a_i$, és $b'|a_i$, akkor $b'|b$.

194) Mikor mondjuk egységelemes integritási tartomány elemeire, hogy relatív prímek?

Ha az *R* egységelemes integritási tartományban az $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ elemek legnagyobb közös osztói egységek, akkor $a_1, a_2, \dots, a_n$ relatív prímek.

195) Mit értünk egységelemes integritási tartományban legkisebb közös többszörös alatt?

Az *R* egységelemes integritási tartományban az $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ elemeknek a $b \in R$ elem legkisebb közös többszöröse, ha $i = 1,2,\dots,n$ esetén $b|a_i$, és $b'|a_i$, akkor $b|b'$.

196) Mi a kapcsolat a természetes számok körében és az egész számok körében vett oszthatóság között?

Ha $m, n \in \mathbb{Z}$, akkor $m|n$ pontosan akkor teljesül, ha $|m|||n|$ az $\mathbb{N}$-ben, mivel $|mn| = |m| \cdot |n|$.

197) Egyértelmű-e az egész számok körében a legnagyobb közös osztó? Ismertesse a kapcsolódó jelölést.

Nem. A $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok legnagyobb közös osztói közül az egyik nemnegatív, ezt $lnko(a_1, a_2, \dots, a_n)$-nel jelöljük. (Használt jelölés még a $gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ és az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is.)

198) Egyértelmű-e az egész számok körében a legkisebb közös többszörös? Ismertesse a kapcsolódó jelölést.

Nem. A $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok legkisebb közös többszörösei közül az egyik nemnegatív, ezt $lkkt(a_1, a_2, \dots, a_n)$-nel jelöljük. (Használt jelölés még az $lcm(a_1, a_2, \dots, a_n)$ és az $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ is.)

199) Ismertesse a bővített euklideszi algoritmust.

A bővített euklideszi algoritmus meghatározza az $a, b \in \mathbb{Z}$ egészek egy *d* legnagyobb közös osztóját, valamint az $x, y \in \mathbb{Z}$ egész számokat úgy, hogy $d = ax + by$ teljesüljön. (Az eljárás során végig $ax_n + by_n = r_n,\ n = 0,1, \dots$)

(1) *[Inicializálás.]* Legyen $x_0 \leftarrow 1, y_0 \leftarrow 0,\ r_0 \leftarrow a, x_1 \leftarrow 0,\ y_1 \leftarrow 1,\ r_1 \leftarrow b,\ n \leftarrow 0$.

(2) *[Vége?]* Ha $r_{n+1} = 0$, akkor $x \leftarrow x_n,\ y \leftarrow y_n,\ d \leftarrow r_n$, és az eljárás véget ért.

(3) *[Ciklus.]* Legyen $q_{n+1} \leftarrow \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor$, $r_{n+2} \leftarrow r_n \bmod r_{n+1} = r_n - r_{n+1}q_{n+1},\ x_{n+2} \leftarrow x_n - x_{n+1}q_{n+1},$ $y_{n+2} \leftarrow y_n - y_{n+1}q_{n+1},\ n \leftarrow n + 1$ és menjünk (2)-re.

200) Mely tétel alapján számolhatjuk ki véges sok egész szám legnagyobb közös osztóját prímfelbontás nélkül?

Bármely $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak létezik legnagyobb közös osztója, és:
$lnko(a_1, a_2, \dots, a_n) = lnko(lnko(a_1, a_2), a_3, a_4, \dots, a_n)$.

201) Fogalmazza meg a számelmélet alaptételét.

Minden pozitív természetes szám a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható prímszámok szorzataként.

202) Definiálja prímtényezős felbontásnál a kanonikus alakot.

Egy természetes szám kanonikus alakja azt értjük, hogy ha a számelmélet alaptételében szereplő prímtényezős felbontást $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ alakban írjuk, ahol $p_1, p_2, \dots, p_k$ különböző prímek, a kitevők pedig $\mathbb{N}^+$ elemei. A kanonikus alak a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

203) Hogyan határozhatók meg természetes számok esetén az osztók, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös a prímtényezős felbontás segítségével?

Ha adott *a* szám kanonikus alakban, akkor azok a természetes számok osztják *a*-t, amelyek kanonikus alakjában csak *a* prímtényezői szerepelnek és egyik prímtényező sem szerepel nagyobb hatványon, mint *a* kanonikus alakjában. Formálisan: *a* kanonikus alakja legyen $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, ekkor:
$\forall b \in \mathbb{N}(b|a) \Leftrightarrow b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} : \beta_i \leq \alpha_i, (i = 1,2, \dots k)$.

Bármely $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét úgy kapjuk meg, hogy ha felírjuk mindegyik szám kanonikus alakját úgy kiegészítve, hogy mindegyikben ugyanazok a prímtényezők szerepeljenek (a feleslegesek a 0. hatványon), akkor:
$a_i = p_1^{\alpha_{i_1}} p_2^{\alpha_{i_2}} \cdots p_k^{\alpha_{i_k}}, (i = 1,2, \dots k)$,
$lnko(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{min(\alpha_{1_1}, \alpha_{2_1}, \dots, \alpha_{k_1})} p_2^{min(\alpha_{1_2}, \alpha_{2_2}, \dots, \alpha_{k_2})} \cdots p_k^{min\left(\alpha_{1_k}, \alpha_{2_k}, \dots, \alpha_{k_k}\right)}$,
$lkkt(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{max(\alpha_{1_1}, \alpha_{2_1}, \dots, \alpha_{k_1})} p_2^{max(\alpha_{1_2}, \alpha_{2_2}, \dots, \alpha_{k_2})} \cdots p_k^{max\left(\alpha_{1_k}, \alpha_{2_k}, \dots, \alpha_{k_k}\right)}$.

204) Mi a kapcsolat két egész szám legnagyobb közös osztója és a legkisebb közös többszöröse között?

$lnko(a, b) \cdot lkkt(a, b) = |ab|$

205) Hogyan számolhatjuk ki véges sok egész szám legkisebb közös többszörösét prímfelbontás nélkül?

Tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak létezik legkisebb közös többszöröse, és:
$lkkt(a_1, a_2, \dots, a_n) = lkkt(lkkt(a_1, a_2), a_3, a_4, \dots, a_n)$.

206) Ismertess Erathoszthenész szitáját.

Ha egy adott *n*-ig az összes prímet meg akarjuk találni, Erathoszthenész szitája hatékony módszert ad: írjuk fel a számokat 2-től *n*-ig. Az első szám, a 2 prím, összes (valódi) többszöröse összetett, ezeket húzzuk ki. A megmaradó számok közül az első a 3, ez prím, ennek minden (valódi) többszöröse összetett, ezeket húzzuk ki, stb. Az eljárás végén az *n*-nél nem nagyobb prímek maradnak meg.

207) Definiálja egész számok kongruenciáját és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha $a, b, m \in \mathbb{Z}$ és m osztója $a - b$-nek, akkor a és b kongruensek modulo m; ezt úgy jelöljük, hogy $a \equiv b \ (mod\ m)$. Ha a és b nem kongruensek modulo m, akkor inkongruensek modulo m, és azt írjuk, hogy $a \not\equiv b \ (mod\ m)$. (Szokásos a tömörebb $a \equiv b \ (m)$ és $a \not\equiv b \ (m)$ jelölés is.)

208) Fogalmazza meg az egész számok kongruenciájának egyszerű tulajdonságait.

H ha $a \equiv b \ (mod\ m)$ és $d|m$, akkor $a \equiv b \ (mod\ d)$ is teljesül. Ha $0 \neq d \in \mathbb{Z}$, akkor $a \equiv b \ (mod\ m)$ ekivalens azzal, hogy $ad \equiv bd \ (mod\ md)$. Az oszthatóság tulajdonságaiból következik, hogy bármely adott $m \in \mathbb{Z}$-re a kongruencia ekvivalenciareláció $\mathbb{Z}$-ben. Az m és a $-m$ szerinti kongruencia ugyanazt jelenti.

209) Definiálja a maradékosztály, redukált maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer fogalmát.

Egy $m \in \mathbb{Z}$ modulus szerinti kongruencia ekvivalenciaosztályait maradékosztályoknak nevezzük. Ha egy maradékosztály valamelyik eleme relatív prím a modulushoz, akkor mindegyik, és ekkor a maradékosztály redukált maradékosztálynak nevezzük. Páronként inkongruens egészek egy rendszerét maradékrendszernek nevezzük. Ha egy maradékrendszer minden maradékosztályából tartalmaz elemet, akkor teljes maradékrendszernek nevezzük. Ha egy maradékrendszer pontosan a redukált maradékosztályokból tartalmaz elemet, akkor redukált maradékrendszernek nevezzük.

210) Definiálja $\mathbb{Z}_m$-et. Milyen algebrai struktúra $\mathbb{Z}_m$?

A kongruencia kompatibilis az összeadással és a szorzással. Az maradékosztályok kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak az összeadással és a szorzással. Ezt a gyűrűt $\mathbb{Z}_m$-el jelöljük.

211) Fogalmazza meg a $\mathbb{Z}_m$ gyűrű tulajdonságait leíró tételt.

Legyen $1 < m \in \mathbb{Z}$. Ha $1 < lnko(a, m) < m$, akkor *a* maradékosztálya nullosztó $\mathbb{Z}_m$-ben. Ha $lnko(a, m) = 1$, akkor *a* maradékosztályának van multiplikatív inverze $\mathbb{Z}_m$-ben. Speciálisan, ha *m* prímszám, akkor $\mathbb{Z}_m$ test.

212) Definiálja az Euler-féle φ függvényt.

Legyen $m > 0$ egész szám, és jelölje $\varphi(m)$ a modulo *m* redukált maradékosztályok számát; φ az Euler-féle φ függvény. Nyilván $\varphi(m)$ az *m*-hez relatív prím számok száma a $0,1,2, \dots, m - 1$ számok közül.

213) Fogalmazza meg az Euler-Fermat-tételt.

Legyen $m > 1$ egész szám, *a* relatív prím *m*-hez. Ekkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$.

214) Fogalmazza meg a Fermat-tételt.

Legyen *p* prímszám. Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $p \nmid a$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$. Ha $a \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, akkor $a^p \equiv a \ (mod\ p)$.

215) Mit értünk diofantikus problémán?

Ha egy egyenlet vagy egyenletrendszer egész megoldásait keressük, akkor diofantikus problémáról beszélünk.

216) Mondjon két példát diofantikus problémára.

- $x^2 + y^2 = -4$, nincs se egész, se valós megoldása.
- $x^4 - 4y^4 = 3$, nincs egész megoldása, mivel $x^4 - 4y^4 \equiv 0 \vee 1\ (mod\ 4)$, míg $3 \equiv 3\ (mod\ 4)$.

217) Fogalmazza meg a kínai maradéktételt.

Legyenek $m_1, m_2, \dots, m_n$ egynél nagyobb, páronként relatív prím természetes számok, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$. Az $x \equiv c_j\ (mod\ m_j)$, $j = 1,2, \dots, n$ kongruenciarendszer megoldható, és bármely két megoldása kongruens modulo $m_1 m_2 \cdots m_n$.

218) Definiálja a számelméleti függvény, az additív számelméleti függvény és a teljesen additív számelméleti függvény fogalmát.

Egy $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ függvényt számelméleti függvény. Ha relatív prím $m, n \in \mathbb{N}^+$ számok esetén $f(mn) = f(m) + f(n)$, akkor *f*-et additívnak nevezzük, ha pedig ez bármely $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén fennáll, akkor *f*-et teljesen (vagy totálisan) additívnak nevezzük.

219) Definiálja a számelméleti függvény, a multiplikatív számelméleti függvény és a teljesen multiplikatív számelméleti függvény fogalmát.

Egy $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ függvényt számelméleti függvény. Ha relatív prím $m, n \in \mathbb{N}^+$ számok esetén $f(mn) = f(m)f(n)$, akkor *f*-et multiplikatívnak nevezzük, ha pedig ez bármely $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén fennáll, akkor *f*-et teljesen (vagy totálisan) multiplikatívnak nevezzük.

220) Fogalmazza meg az additív, a multiplikatív, a teljesen additív és a teljesen multiplikatív számelméleti függvények kiszámítására vonatkozó tételt.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Ekkor

(1) ha *f* additív számelméleti függvény, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + f(p_k^{\alpha_k})$;
(2) ha *f* multiplikatív számelméleti függvény, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_k^{\alpha_k})$;
(3) ha *f* teljesen additív számelméleti függvény, akkor $f(n) = \alpha_1 f(p_1) + \cdots + \alpha_k f(p_k)$;
(4) ha *f* teljesen multiplikatív számelméleti függvény, akkor $f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} \cdots f(p_k)^{\alpha_k}$.

221) Adjon egyszerű példát additív, a multiplikatív, a teljesen additív és a teljesen multiplikatív számelméleti függvényekre.

- A $\nu(n)$ függvény az *n* szám különböző prímosztóinak száma. ν additív, de nem teljesen additív számelméleti függvény.
- Az Euler-féle φ függvény multiplikatív, de nem teljesen multiplikatív számelméleti függvény.
- Az azonosan 0 függvény teljesen additív (és teljesen multiplikatív) számelméleti függvény.
- Az azonosan 1 függvény teljesen multiplikatív számelméleti függvény.

222) Definiálja a μ és ν számelméleti függvényeket. Milyen tulajdonságúak?ű

A μ Möbius-függvény: $\mu(n) = 0$, ha *n* osztható egy prímszám négyzetével, és $\mu(n) = (-1)^k$, ha *n* pontosan *k* darab különböző prímszám szorzata. A μ multiplikatív, de nem teljesen multiplikatív számelméleti függvény.

A $\upsilon(n)$ az *n* szám különböző prímosztóinak száma. Ekkor υ függvény additív, azonban nem teljesen additív számelméleti függvény.

223) Fogalmazza meg az Euler-féle φ függvény kiszámítására vonatkozó tételt.

Az Euler-féle φ függvény multiplikatív, és ha $n \in \mathbb{N}^+$ kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor:

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} \left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_{j-1}}\right) = n \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

224) Fogalmazza meg a kiválasztási axiómát.

Nem üres halmazok bármely családjához létezik kiválasztási függvény.

225) Fogalmazza meg a Zorn-lemmát.

Ha egy részbenrendezett halmaz minden lánca felülről korlátos, akkor a halmaznak van maximális eleme.

226) Fogalmazza meg a jólrendezési tételt.

Minden halmaz jólrendezhető.

227) Mikor mondjuk, hogy egy halmaz majorál egy másikat? Mikor mondjuk, hogy egy halmaz szigorúan majorál egy másikat?

Ha *X* és *Y* halmazok és *X* ekvivalens *Y* valamely részhalmazával, akkor *Y* majorálja *X*-et. (Jelölése: $X \precsim Y$ illetve $Y \succsim X$.) Ha $X \precsim Y$, de $X \nsim Y$, akkor *Y* szigorúan majorálja *X*-et. (Jelölése: $X \prec Y$ illetve $Y \succ X$.)

228) Milyen nyilvánvaló tulajdonságai vannak halmazok majorálásának?

- Véges halmazokra $X \precsim Y$ ekvivalens azzal, hogy $\#(X) \leq \#(Y)$.
- Reflexivitás: $X \precsim X$.
- Tranzitivitás: $X \precsim Y \wedge Y \precsim Z \Rightarrow X \precsim Z$.

229) Fogalmazza meg a Schröder-Berstein-tételt.

Ha $X \precsim Y$ és $Y \precsim X$, akkor $X \sim Y$.

230) Fogalmazza meg a Schröder-Berstein-tétel szigorú majorálásra vonatkozó követelményét.

Ha $X \prec Y$ és $Y \precsim Z$, vagy ha $X \precsim Y$ és $Y \prec Z$, akkor $X \prec Z$.

231) Fogalmazza meg a halmazok összehasonlíthatóságára vonatkozó tételt.

Ha *X* és *Y* halmazok, akkor $X \precsim Y$ vagy $Y \precsim X$.

232) Fogalmazza meg Cantor tételét.

Bármely *X* halmazra $X \prec \rho(X)$.

233) Definiálja a megszámlálható végtelen és a megszámlálható fogalmát.

Egy halmazt megszámlálható végtelennek nevezünk, ha ekvivalens $\mathbb{N}$-el. Ha egy halmaz véges, vagy megszámlálható végtelen, akkor megszámlálhatónak nevezzük.

234) Adjon a megszámlálható végtelen fogalma segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen.

Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha van megszámlálható végtelen részhalmaza.

235) Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz véges, megszámlálható illetve végtelen legyen.

Egy *X* halmaz akkor és csak akkor véges, ha $X \prec \mathbb{N}$, akkor és csak akkor megszámlálható, ha $X \precsim \mathbb{N}$, ésakkor és csak akkor végtelen, ha $\mathbb{N} \precsim X$.

236) Mit mondhatunk megszámlálható halmaz részhalmazáról?

Megszámlálható halmaz bármely részhalmaz is megszámlálható.

237) Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem üres halmaz megszámlálható legyen.

Egy *X* nem üres halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik $\mathbb{N}$-et *X*-re képező leképezés.

238) Milyen halmazműveletekre bizonyítottuk, hogy nem vezetnek ki a megszámlálható halmazok köréből?

Megszámlálható halmazok illetve családjaik uniójára.

239) A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$, $\wp(\mathbb{N})$ halmazok közül melyek megszámlálhatóak?

A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ halmazok megszámlálhatóak.

240) Egy végtelen halmaz és egy megszámlálható halmaz unióját képezzük. Mit állíthatunk az unióról?

Ha *X* megszámlálható halmaz, *Y* végtelen halmaz, akkor $X \cup Y \sim Y$.

241) Adjon valódi részhalmazok segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen.

Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával.

242) Definiálja a kontinuum számosságú halmaz fogalmát.

Az *X* halmazt kontinuum számosságú, ha ekvivalens $\mathbb{R}$-rel.

243) Az $\mathbb{R}$ mely részhalmazairól bizonyítottuk, hogy kontinuum számosságúak?

Az $\mathbb{R}$ és a $]0,1[$, $]0,1]$ és $[0,1]$ részintervallumai ekvivalansek, így kontinuum számosságúak.

244) A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$, $\wp(\mathbb{N})$ halmazok közül melyek kontinuum számosságúak?

A $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $\wp(\mathbb{N})$halmazok kontinuum számosságúak, de $\mathbb{R}^0$ nem.

II. rész: Bizonyítások

A hivatkozások „Járai Antal: Bevezetés a matematikába” (2. kiadás) című könyvére vonatkoznak.

1) **Fogalmazza meg a halmazok uniójának kommutativitását, asszociativitását és idempotenciáját és bizonyítsa be.**
   Állítás: 16. oldal, 1.2.13.

2) **Fogalmazza meg a halmazok metszetének kommutativitását, asszociativitását és idempotenciáját és bizonyítsa be.**
   Állítás: 16. oldal, 1.2.15.

3) **Fogalmazza meg és bizonyítsa be az unió és a metszet disztributivitását.**
   Állítás: 17. oldal, 1.2.16.

4) **Fogalmazza meg és bizonyítsa be a De Morgan azonosságokat két halmazra.**
   Állítás: 17. oldal, 1.2.18., (7), (8)

5) **Mi a rendezett pár alaptulajdonsága? Bizonyítsa be, hogy rendelkezik vele.**
   Állítás: 19. oldal, 1.3.1.
   Bizonyítás: 19. oldal, 1.3.1.

6) **Bizonyítsa be, hogy binér relációk kompozíciója asszociatív.**
   Állítás: 21. oldal, 1.3.10., (2)

7) **Fogalmazza meg a két binér reláció kompozíciójának inverzére vonatkozó állítást és bizonyítsa be.**
   Állítás: 21. oldal, 1.3.10., (3)

8) **Fogalmazza meg az ekvivalenciareláció és az osztályozás kapcsolatát és bizonyítsa be.**
   Állítás: 22. oldal, 1.3.15.
   Bizonyítás: 22. oldal, 1.3.15.

9) **Fogalmazza meg a szigorú részbenrendezés kapcsolatát a részbenrendezéssel és bizonyítsa be állítását.**
   Állítás: 22. oldal, 1.3.18., 2. bekezdés

10) **Mikor állíthatjuk, hogy két függvény összetétele injektív, szürjektív illetve bijektív? Bizonyítsa be állítását.**
    Állítás: 25. oldal, 1.4.2.

11) **Fogalmazza meg a halmazcsaládokra vonatkozó De Morgan-szabályokat és bizonyítsa be őket.**
    Állítás: 26. oldal, 1.4.5.

12) **Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n \neq n^+$ és ha $0 \neq n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $n = m^+$.**
    Állítás: 30. oldal, 2.1.1., 3. és 4. bekezdés
    Bizonyítás: 30. oldal, 2.1.1., 3. és 4. bekezdés

13) **Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok egyértelműségére vonatkozó tételt.**
    Állítás: 32. oldal, 2.1.6.
    Bizonyítás: 32. oldal, 2.1.6.

14) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt, a kommutativitást kivéve.
Állítás: 34. oldal, 2.2.2., 1. bekezdés
Bizonyítás: 34. oldal, 2.2.2., 2. és 3. bekezdés

15) Fogalmazza meg a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt és bizonyítsa be a kommutativitást.
Állítás: 34. oldal, 2.2.2., 1. bekezdés
Bizonyítás: 34. oldal, 2.2.2., 4. bekezdés

16) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok szorzásának alaptulajdonságait kimondó tételt, a kommutativitást kivéve.
Állítás: 35. oldal, 2.2.4., 1. bekezdés
Bizonyítás: 35. oldal, 2.2.4., 2. és 3. bekezdés

17) Fogalmazza meg a természetes számok szorzásának alaptulajdonságait kimondó tételt és bizonyítsa be a kommutativitást.
Állítás: 35. oldal, 2.2.4., 1. bekezdés
Bizonyítás: 35. oldal, 2.2.4., 4. bekezdés

18) Bizonyítsa be, hogy a természetes számok halmaza a $\leq$ relációval rendezett.
Állítás: 37. oldal, 2.3.2.
Bizonyítás: 37. oldal, 2.3.2.

19) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számokra a $\leq$ reláció és a műveletek kapcsolatát leíró tételt.
Állítás: 38. oldal, 2.3.3.
Bizonyítás: 38. oldal, 2.3.3.

20) Bizonyítsa be, hogy a természetes számok halmaza a $\leq$ relációval jólrendezett. Azt, hogy rendezett, nem kell bizonyítania.
Állítás: 38. oldal, 2.3.4.
Bizonyítás: 38. oldal, 2.3.4.

21) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a maradékos osztás tételét.
Állítás: 41. oldal, 2.3.11.
Bizonyítás: 41. oldal, 2.3.11.

22) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a számrendszerekre vonatkozó tételt.
Állítás: 41. oldal, 2.3.13.
Bizonyítás: 41. oldal, 2.3.13.

23) Fogalmazza meg gyűrűben a nullával való szorzás tulajdonságait és az előjelszabályt és bizonyítsa be őket.
Állítás: 44. oldal, 3.1.6., 2. bekezdés eleje
Bizonyítás: 44. oldal, 3.1.6., 2. bekezdés eleje

24) Fogalmazza meg gyűrűben az egész együtthatóval való szorzás tulajdonságait.
Állítás: 44. oldal, 3.1.6., 2. bekezdés vége
Bizonyítás: 44. oldal, 3.1.6., 2. bekezdés vége

25) **Fogalmazza meg az általános disztributivitás tételét és bizonyítsa be.**
Állítás: 45. oldal, 3.1.9.
Bizonyítás: 45. oldal, 3.1.9.

26) **Definiálja a bal és jobb oldali nullosztó és a nullosztópár fogalmát. Adjon meg két lényegesen különböző, nullosztókkal kapcsolatos állítást és bizonyítsa be őket.**
Állítás: 46. oldal, 3.1.10., 1. bekezdés
Bizonyítás: 46. oldal, 3.1.10., 1. bekezdés

27) **Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy integritási tartomány rendezett integritási tartomány legyen, és bizonyítsa be az állítást.**
Állítás: 46. oldal, 3.1.11.
Bizonyítás: 46. oldal, 3.1.11.

28) **Fogalmazza meg a rendezett integritási tartományban az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait leíró tételt és bizonyítsa be.**
Állítás: 47. oldal, 3.1.12.
Bizonyítás: 47. oldal, 3.1.12.

29) **Definiálja a racionális számok halmazát az összeadással, bizonyítsa be, hogy az összeadás kompatibilis az osztályozással, és az összeadással a racionális számok halmaza Abel-csoport.**
Állítás: 47. oldal, 3.2.1., 1. bekezdés
Bizonyítás: 47. oldal, 3.2.1., 3. bekezdés

30) **Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel, bizonyítsa be, hogy a szorzás kompatibilis az osztályozással, és felhasználva, hogy az összeadással a racionális számok halmaza Abel-csoport, bizonyítsa be, hogy test.**
Állítás: 47. oldal, 3.2.1., 1. bekezdés és 49. oldal, 3.2.3., 1.bekezdés
Bizonyítás: 47. oldal, 3.2.1., 4. bekezdés és 49. oldal, 3.2.3., 1.bekezdés

31) **Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel és a rendezéssel, és felhasználva, hogy test, bizonyítsa be a rendezés tulajdonságait, beleértve, hogy kompatibilis az osztályozással.**
Állítás: 47. oldal, 3.2.1., 1. bekezdés
Bizonyítás: 47. oldal, 3.2.1, 6. bekezdés

32) **Van-e olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2? Bizonyítsa be az állítását.**
Állítás: 50. oldal, 3.3.1.
Bizonyítás: 50. oldal, 3.3.1.

33) **Fogalmazza meg a felső határ tulajdonságot és az Archimédészi tulajdonságot. Mi a kapcsolatuk? Bizonyítsa be állítását.**
Állítás: 50. oldal, 3.3.2.
Bizonyítás: 50. oldal, 3.3.2.

34) **Bizonyítsa be, hogy a racionális számok rendezett teste nem felső határ tulajdonságú.**
Állítás: 50. oldal, 3.3.3., 1. bekezdés
Bizonyítás: 50. oldal, 3.3.3., 3. bekezdés

35) **Bizonyítsa be, hogy a racionális számok rendezett teste Archimédészi tulajdonságú.**
Állítás: 50. oldal, 3.3.3., 1. bekezdés
Bizonyítás: 50. oldal, 3.3.3., 2. bekezdés

36) Definiálja a komplex számok halmazát a műveletekkel és bizonyítsa be, hogy test.
Állítás: 55. oldal, 3.4.1., 1. bekezdés
Bizonyítás: 50. oldal, 3.4.1., 1. bekezdés

37) Fogalmazza meg komplex számok abszolút értékének tulajdonságait és bizonyítsa be.
Állítás: 56. oldal, 3.4.3., 3. bekezdés
Bizonyítás: 56. oldal, 3.4.3., 3. bekezdés

38) Sorolja fel kvaterniók abszolút értékének tulajdonságait és bizonyítsa be ezeket.
Állítás: 60. oldal, 3.4.11.
Bizonyítás: 60. oldal, 3.4.11.

39) Bizonyítsa be, hogy bármely $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$-re $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ bármely valódi részhalmaza ekvivalens egy $\boldsymbol{m} < n$ természetes számra $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{m}\}$-mel.
Állítás: 62. oldal, 4.1.4.
Bizonyítás: 62. oldal, 4.1.4.

40) Bizonyítsa be, hogy bármely $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$-re nem létezik ekvivalencia $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ és egy valódi részhalmaza között.
Állítás: 63. oldal, 4.1.5.
Bizonyítás: 63. oldal, 4.1.5.

41) Fogalmazza meg a véges halmazok és elemszámuk tulajdonságait leíró tételt és bizonyítsa be.
Állítás: 63. oldal, 4.1.7.
Bizonyítás: 63. oldal, 4.1.7.

42) Fogalmazza meg a skatulyaelvet és bizonyítsa be.
Állítás: 64. oldal, 4.1.8.
Bizonyítás: 64. oldal, 4.1.8.

43) Mit mondhatunk véges halmazban minimális és maximális elem létezéséről? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 64. oldal, 4.1.9.
Bizonyítás: 64. oldal, 4.1.9.

44) Mit mondhatunk egy véges halmaz összes permutációinak számáról? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 64. oldal, 4.2.1., 3. bekezdés
Bizonyítás: 64. oldal, 4.2.1., 3. bekezdés

45) Mit értünk egy véges halmaz variációin és mit mondhatunk az összes variációk számáról? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 65. oldal, 4.2.2.
Bizonyítás: 65. oldal, 4.2.2.

46) Mit értünk egy véges halmaz kombinációin és mit mondhatunk az összes kombinációk számáról? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 65. oldal, 4.2.4.
Bizonyítás: 65. oldal, 4.2.4.

47) Mit értünk egy véges halmaz ismétléses kombinációin és mit mondhatunk az összes ismétléses kombinációk számáról? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 65. oldal, 4.2.5.
Bizonyítás: 65. oldal, 4.2.5.

48) Mit értünk egy véges halmaz ismétléses permutációin és mit mondhatunk az összes ismétléses permutációk számáról? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 66. oldal, 4.2.6.
Bizonyítás: 66. oldal, 4.2.6.

49) Fogalmazza meg a binomiális tételt és bizonyítsa be.
Állítás: 67. oldal, 4.3.1.
Bizonyítás: 67. oldal, 4.3.1.

50) Fogalmazza meg a polinomiális tételt és bizonyítsa be.
Állítás: 67. oldal, 4.3.3.
Bizonyítás: 67. oldal, 4.3.3.

51) Fogalmazza meg a logikai szita formulát és bizonyítsa be.
Állítás: 68. oldal, 4.3.4.
Bizonyítás: 68. oldal, 4.3.4.

52) Sorolja fel a természetes számok körében az oszthatóság alaptulajdonságait és bizonyítsa be ezeket.
Állítás: 77. oldal, 6.1.2.

53) Sorolja fel egységelemes integritási tartományban az oszthatóság alaptulajdonságait és bizonyítsa be ezeket.
Állítás: 78. oldal, 6.1.5.

54) Mi a kapcsolat az egységek és az asszociáltak között? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 78. oldal, 6.1.6.
Bizonyítás: 78. oldal, 6.1.6.

55) Ismertesse a bővített euklideszi algoritmust. Bizonyítsa be, hogy működik.
Állítás: 80. oldal, 6.1.11.
Bizonyítás: 80. oldal, 6.1.11.

56) Mi a kapcsolat $\mathbb{Z}$-ben a prímelemek és az irreducibilis elemek között. Bizonyítsa állítását.
Állítás: 79. oldal, 6.1.8. és 81. oldal, 6.1.15.
Bizonyítás: 79. oldal, 6.1.8. és 81. oldal, 6.1.15.

57) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a számelmélet alaptételét.
Állítás: 81. oldal, 6.1.17.
Bizonyítás: 81. oldal, 6.1.17.

58) Fogalmazza meg Eukleidész tételét és a prímszámok közötti résekre vonatkozó állítást, és mindkettőt bizonyítsa be.
Állítás: 81. oldal, 6.1.18. és 82. oldal, 6.1.19.
Bizonyítás: 81. oldal, 6.1.18. és 82. oldal, 6.1.19.

59) Fogalmazza meg az egész számok kongruenciájának egyszerű tulajdonságait és bizonyítsa be azokat.
Állítás: 83. oldal, 6.2.1., 1. bekezdés vége

60) Mit mondhatunk az $aa_i + b$ számokról, ha a_i egy maradékrendszer, illetve egy redukált maradékrendszer elemeit futja be? Bizonyítsa be állítását.
Állítás: 85. oldal, 6.2.5.
Bizonyítás: 85. oldal, 6.2.5.

61) Fogalmazza meg és bizonyítsa be az Euler-Fermat tételt.
Állítás: 85. oldal, 6.2.6.
Bizonyítás: 85. oldal, 6.2.6.

62) Fogalmazza meg és bizonyítsa be Fermat-tételt.
Állítás: 85. oldal, 6.2.7.
Bizonyítás: 85. oldal, 6.2.7.

63) Ismertesse a lineáris kongruenciák megoldásának módszerét részletes indoklással.
Leírás: 85. oldal, 6.2.8.

64) Ismertesse a lineáris kongruenciarendszerek megoldásának módszerét részletes indoklással.
Leírás: 86. oldal, 6.2.9.

65) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a kínai maradéktételt.
Állítás: 86. oldal, 6.2.12.
Bizonyítás: 86. oldal, 6.2.12.

66) Ismertesse az RSA eljárást részletes indoklással.
Leírás: 87. oldal, 6.2.15.

67) Fogalmazza meg az additív, multiplikatív, teljesen additív és teljesen multiplikatív számelméleti függvények kiszámítására vonatkozó tételt és bizonyítsa be.
Állítás: 89. oldal, 6.3.2.
Bizonyítás: 89. oldal, 6.3.2.

68) Fogalmazza meg és bizonyítsa be az Euler-féle φ függvény kiszámítására vonatkozó tételt.
Állítás: 90. oldal, 6.3.4.
Bizonyítás: 90. oldal, 6.3.4.

69) Bizonyítsa be, hogy halmazok majorálása reflexív és tranzitív.
Állítás: 71. oldal, 5.1.5.

70) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Schröder-Bernstein-tételt.
Állítás: 71. oldal, 5.1.6.
Bizonyítás: 71. oldal, 5.1.6.

71) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Schröder-Bernstein-tétel szigorú majorálásra vonaktozó következményét.
Állítás: 72. oldal, 5.1.7.
Bizonyítás: 72. oldal, 5.1.7.

72) Fogalmazza meg és bizonyítsa be Cantor tételét.
Állítás: 73. oldal, 5.1.9.
Bizonyítás: 73. oldal, 5.1.9.

73) Adjon a megszámlálható végtelen fogalma segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen és bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 73. oldal, 5.2.2.
Bizonyítás: 73. oldal, 5.2.2.

74) Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz véges, megszámlálható illetve végtelen legyen és bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 73. oldal, 5.2.3.
Bizonyítás: 73. oldal, 5.2.3.

75) Mit mondhatunk megszámlálható halmaz részhalmazáról? Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 74. oldal, 5.2.4.
Bizonyítás: 73. oldal, 5.2.3. következménye

76) Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem üres halmaz megszámlálható legyen és bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 74. oldal, 5.2.5.
Bizonyítás: 74. oldal, 5.2.5.

77) Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálható végtelen.
Állítás: 74. oldal, 5.2.6.
Bizonyítás: 74. oldal, 5.2.6.

78) A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{R}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{n}$, $\wp(\mathbb{N})$ halmazok közül melyek megszámlálhatóak? Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 74. oldal, 5.2.8.
Bizonyítás: 74. oldal, 5.2.8.

79) Egy végtelen halmaz és egy megszámlálható halmaz unióját képezzük. Mit állíthatunk az unióról? Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 75. oldal, 5.2.9.
Bizonyítás: 75. oldal, 5.2.9.

80) Adjon valódi részhalmazok segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen. Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 75. oldal, 5.2.10.
Bizonyítás: 75. oldal, 5.2.10.

81) Az $\mathbb{R}$ mely részhalmazairól bizonyítottuk, hogy kontinuum számosságúak? Írja le a bizonyítást.
Állítás: 75. oldal, 5.3.2.
Bizonyítás: 75. oldal, 5.3.2.

82) A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{R}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{n}$ halmazok közül melyek kontinuum számosságúak? Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 75. oldal, 5.3.1. és 5.3.4. és 5.3.5.
Bizonyítás: 75. oldal, 5.3.1. és 5.3.4.

83) A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\wp(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{n}$ halmazok közül melyek kontinuum számosságúak? Bizonyítsa be az állítást.
Állítás: 75. oldal, 5.3.3.
Bizonyítás: 75. oldal, 5.3.3.